

DİNAMİK - 8



Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali Dayıođlu
Ankara Üniversitesi Ziraat Fakültesi
Tarım Makinaları ve Teknolojileri Mühendisliđi Bölümü

8. HAFTA

Kapsam:

- Parçacık hareketinde Kuvvet – İvme Yöntemi
- Kutupsal koordinat
- Silindirik Koordinatlar
- Örnek problemler

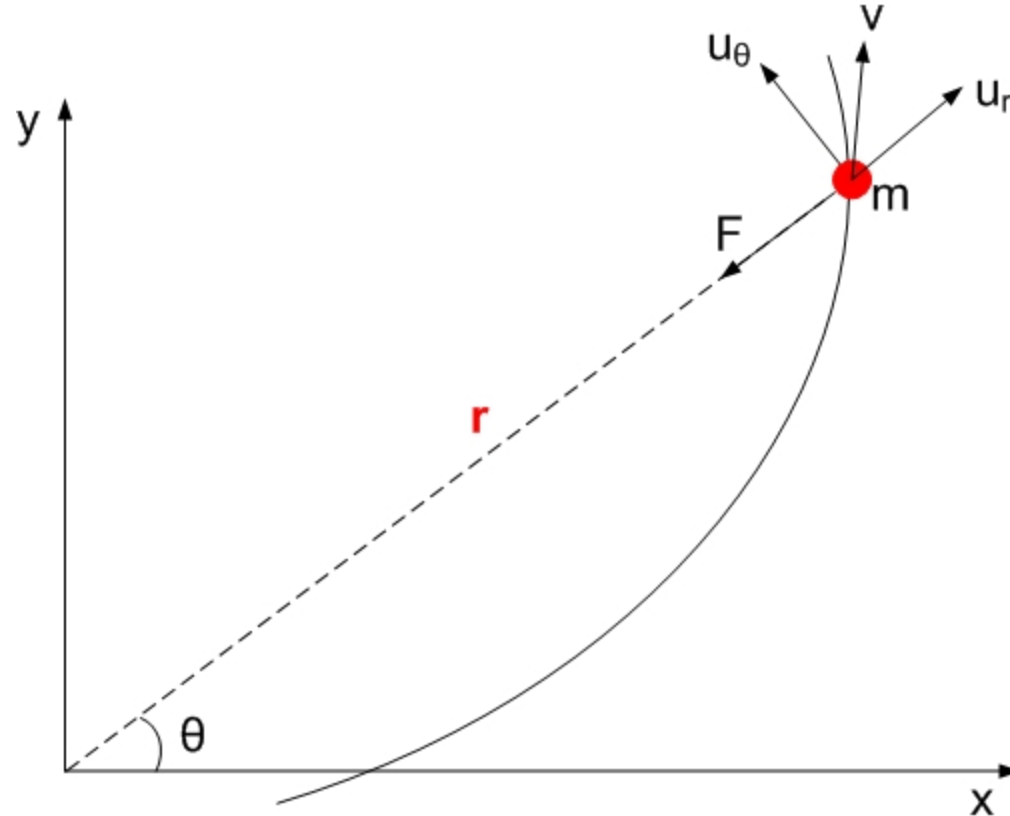
2.7 Kutupsal koordinatlar

Merkezcil Bir Kuvvetin Etkisinde Hareket

Merkezcil bir kuvvetin etkisinde hareket eden bir cisim için polar koordinatlar aşağıdaki gibi kullanılır:

$$\sum F_r = ma_r \rightarrow -F = m(\ddot{r}u_r - r\dot{\theta}^2)$$

$$\sum F_\theta = ma_\theta \rightarrow 0 = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$



2.8. Silindirik Koordinatlar

Koordinat seçimi teğet ve normal koordinatlara uygunsuz;

$$\Sigma \mathbf{F} = m \mathbf{a}$$

$$\Sigma F_r \mathbf{u}_r + \Sigma F_\theta \mathbf{u}_\theta + \Sigma F_z \mathbf{u}_z = m a_r \mathbf{u}_r + m a_\theta \mathbf{u}_\theta + m a_z \mathbf{u}_z$$

$$\Sigma F_r = m a_r$$

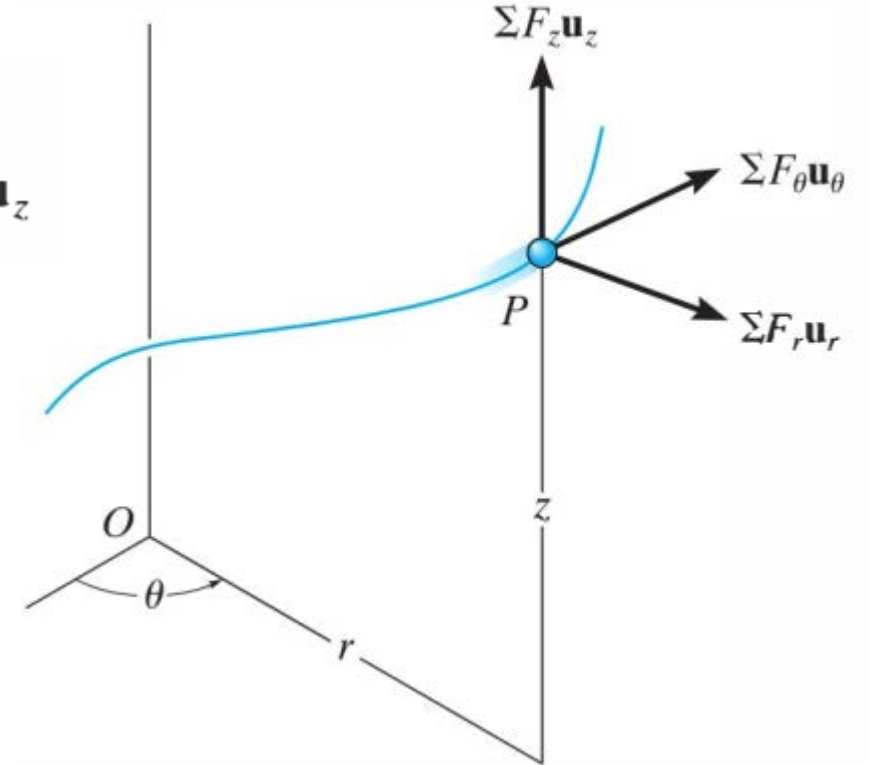
$$\Sigma F_\theta = m a_\theta$$

$$\Sigma F_z = m a_z$$

İvme vektörü:

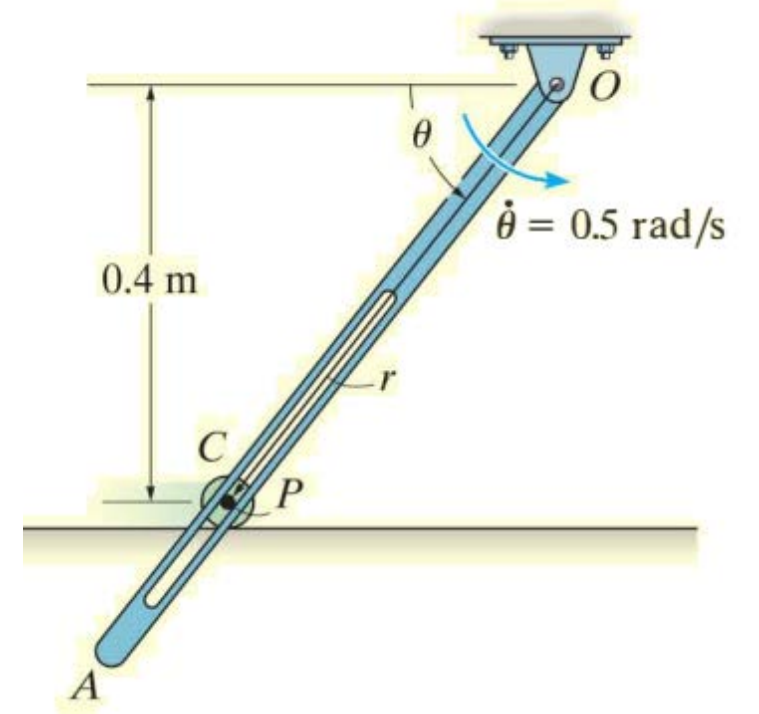
$$\mathbf{a} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{\mathbf{a}_r} \mathbf{u}_r + \underbrace{(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})}_{\mathbf{a}_\theta} \mathbf{u}_\theta + \underbrace{\ddot{z}}_{\mathbf{a}_z} \mathbf{k}$$

İvme bileşenleri



Örnek Problem

2 kg'lık pürüzsüz C silindirin \dot{u} n merkezinde, OA kolundaki oluktan geçen bir P pimi bulunmaktadı. Kol *düşey düzlemde* $\dot{\theta} = 0.5 \text{ rad/s}$ 'lik sabit bir hızla döndüğüne göre, $\theta = 60^\circ$ olduğu anda kolun pime uyguladığı kuvveti belirleyiniz.



Çözüm

Niçin bu problemi çözmek için kutupsal koordinatları kullanmak daha uygundur?

Serbest-Cisim Diyagramı. Silindire ait serbest cisim diyagramı Şekil 13–20b’de gösterilmektedir. Pimin F_P kuvveti koldaki oluğa dik etkir. Her zaman olduğu gibi, \mathbf{a}_r ve \mathbf{a}_θ ’nın, sırasıyla, pozitif r ve θ doğrultularında etki ettiği varsayılır. Dört bilinmeyi belirleyiniz.

Hareket Denklemleri. Şekil 13–20b’deki veriyi kullanarak

$$+\swarrow \sum F_r = ma_r; \quad 19.62 \sin \theta - N_C \sin \theta = 2a_r \quad (1)$$

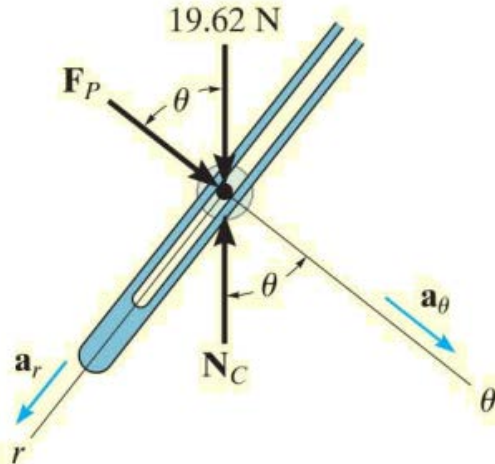
$$+\searrow \sum F_\theta = ma_\theta; \quad 19.62 \sin \theta + F_P - N_C \cos \theta = 2a_\theta \quad (2)$$

buluruz.

Kinematik. Şekil 13–20a’dan r , θ cinsinden

$$r = \frac{0.4}{\sin \theta} = 0.4 \csc \theta$$

şeklinde yazılabilir. $d(\csc \theta) = -(\csc \theta \cot \theta) d\theta$ ve $d(\cot \theta) = -(\csc^2 \theta)$ olduğundan, r ve zamana göre türevler



$$\dot{\theta} = 0.5 \quad r = 0.4 \csc \theta$$

$$\ddot{\theta} = 0 \quad \dot{r} = -0.4(\csc \theta \cot \theta)\dot{\theta}$$

$$= -0.2 \csc \theta \cot \theta$$

$$\ddot{r} = -0.2(-\csc \theta \cot \theta)(\dot{\theta}) \cot \theta - 0.2 \csc \theta(-\csc^2 \theta)\dot{\theta}$$

$$= 0.1 \csc \theta(\cot^2 \theta + \csc^2 \theta)$$

olur. Bu formülleri $\theta = 60^\circ$ için hesaplayarak

$$\dot{\theta} = 0.5 \quad r = 0.462$$

$$\ddot{\theta} = 0 \quad \dot{r} = -0.133$$

$$\ddot{r} = 0.192$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0.192 - 0.462(0.5)^2 = 0.0765$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 + 2(-0.133)(0.5) = -0.133$$

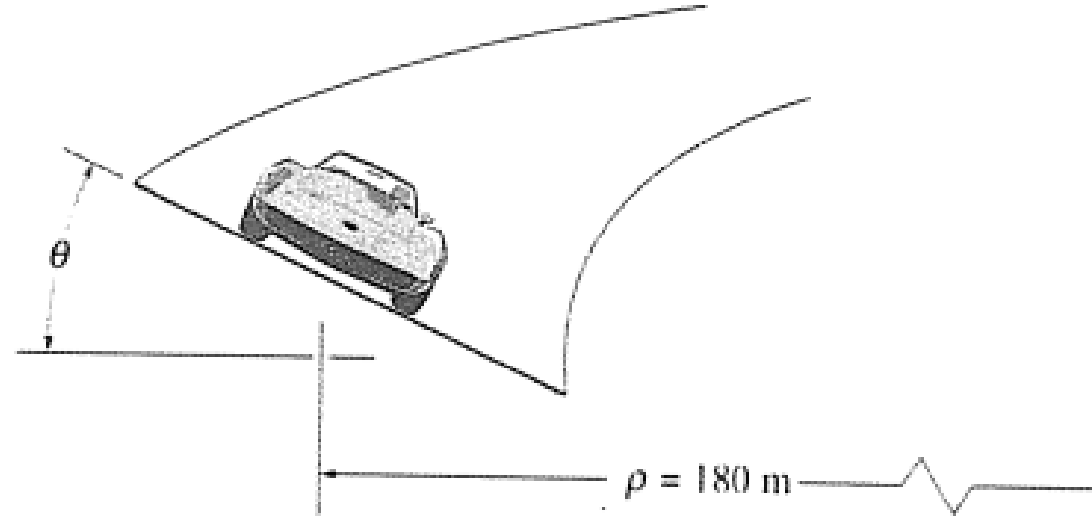
buluruz. Bu sonuçları $\theta = 60^\circ$ için yazılan Denklem 1 ve 2’ye yerleştirir ve çözersek

$$N_C = 19.4 \text{ N} \quad F_P = -0.355 \text{ N}$$

elde ederiz. Eksi işareti, F_P ’nin Şekil 13–20b’de gösterilen yönün tersine etkidiğini gösterir.

Örnek Problem

Şekil 13–12a’da gösterilen spor arabanın tekerleklerinin, arabanın eğri boyunca yukarı veya aşağı kaymasını önlemek üzere sürtünmeye bağımlı olmaması için dairesel yolun θ eğiminin ne olması gerektiğini belirleyiniz. 30 m/s’lik sabit bir hızla hareket eden arabanın boyutları ihmal edilecektir. Yolun yarıçapı 180 m’dir.



Çözüm

Problemin çözümüne bakmadan önce, problemin niçin n , t , b koordinatları kullanılarak çözülmesi gerektiğini düşününüz.

Serbest-Cisim Diyagramı. Şekil 13–12b’de gösterildiği gibi, arabanın bir m kütlesine sahip olduğu varsayılıyor. Problemden ifade edildiği gibi, araba üzerine herhangi bir sürtünme kuvveti etkimemektedir. Burada, \mathbf{N}_C yerden tekerleklere gelen *bileşke* kuvveti göstermektedir. a_n hesaplanabildiğinden, bilinmeyenler N_C ve θ ’dır.

Hareket denklemleri. Şekilde gösterilen n , b eksenlerini kullanarak

$$+\uparrow \sum F_b = 0; \quad N_C \cos \theta - mg = 0 \quad (1)$$

$$+\rightarrow \sum F_n = ma_n \quad N_C \sin \theta = m \frac{v^2}{\rho} \quad (2)$$

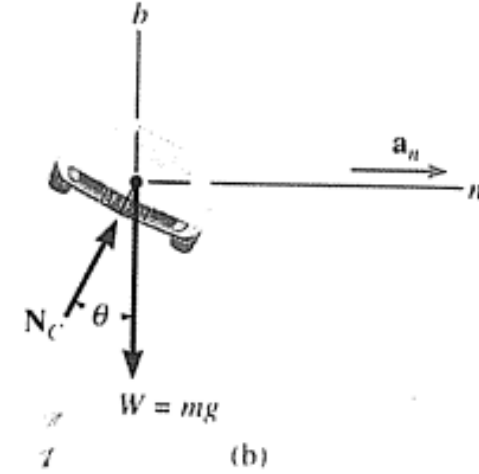
buluruz. Denklem 2 Denklem 1 ile bölünerek N_C ve m yok edilir ve

$$\tan \theta = \frac{v^2}{g\rho} = \frac{(30)^2}{9.81(180)}$$

$$\theta = \tan^{-1}(0.510)$$

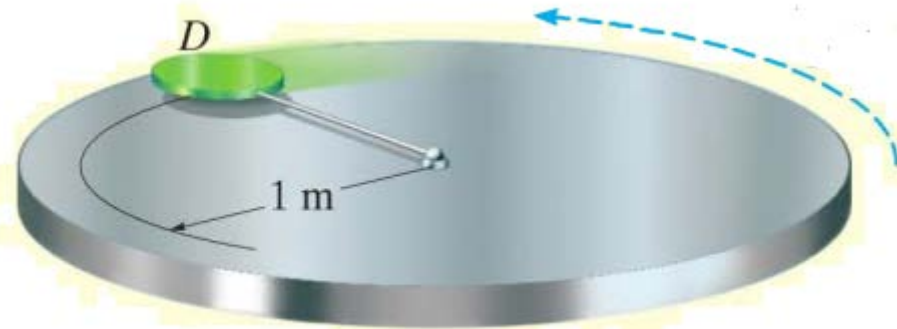
$$= 27.0^\circ$$

Yanıt

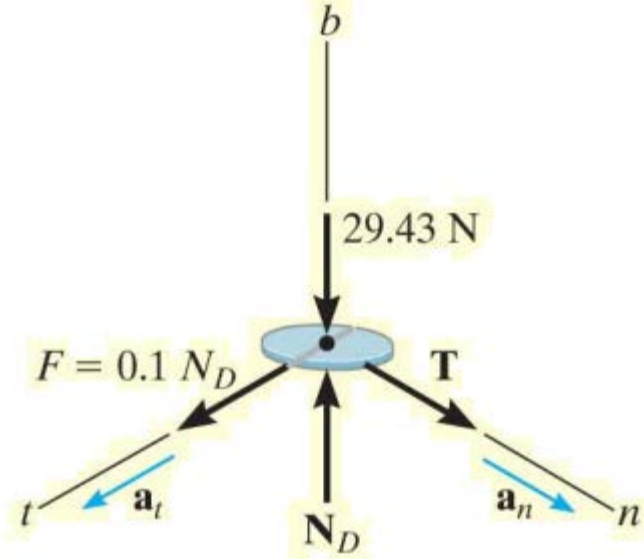


Örnek Problem

3 kg'lık D diski, Şekil 13–3a'da gösterildiği gibi, bir ipin ucuna bağlanıyor. İpin diğer ucu, bir platformun merkezindeki mafsala bağlanıyor. Platform hızlı bir şekilde dönüyor ve disk durağan haldeyken platform üzerine bırakılıyorsa, diskin ipi koparacak hıza ulaşması için gerekli süreyi belirleyiniz. İpin dayanabileceği maksimum çekme kuvveti 100 N'dur ve disk ve platform arasındaki kinetik sürtünme katsayısı $\mu_k = 0.1$ 'dir.



Çözüm



Serbest-Cisim Diyagramı. Şekil 13–13b’de gösterildiği gibi, disk, dengelenmemiş \mathbf{T} ve \mathbf{F} kuvvetlerinin bir sonucu olarak, normal ve teğetsel ivme bileşenlerine sahiptir. Kayma ortaya çıktığından, sürtünme kuvveti $F = \mu_k N_D = 0.1N_D$ büyüklüğüne sahiptir ve yönü diskin platforma göre *bağıl hareketine* karşı koyacak şekildedir. İp, diskin n doğrultusundaki hareketini kısıtlar ve bu yüzden \mathbf{F} pozitif t doğrultusunda etki eder. Diskin ağırlığı $W = 3(9.81) = 29.43 \text{ N}$ ’dur. a_n ve v arasında bir ilişki kurulabildiğinden ve maksimum hızda $T = 100 \text{ N}$ olduğundan, bilinmeyenler N_D , a_t ve v ’dir.

Hareket Denklemleri.

$$\sum F_b = 0; \quad N_D - 29.43 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_t = ma_t; \quad 0.1N_D = 3a_t \quad (2)$$

$$\sum F_n = ma_n \quad T = 3 \left(\frac{v^2}{1} \right) \quad (3)$$

dir. $T = 100 \text{ N}$ yazılarak, diskin ipi koparmak için gerekli v_{cr} kritik hızı Denklem 3’den çözülebilir. Bütün denklemleri çözerek

$$N_D = 29.43 \text{ N}$$

$$a_t = 0.981 \text{ m/s}^2$$

$$v_{cr} = 5.77 \text{ m/s}$$

yi elde ederiz.

Kinematik. a_t sabit olduğundan, ipin kopması için gerekli süre

$$v_{cr} = v_0 + a_t t$$

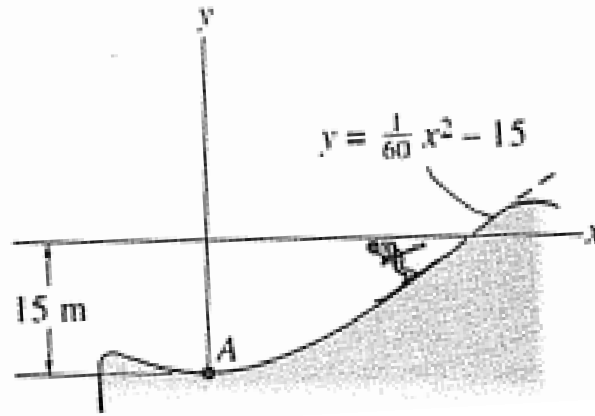
$$5.77 = 0 + (0.981)t$$

$$t = 5.89 \text{ s}$$

Yanıt

Örnek Problem

Şekil 13–14a'daki kayakçı, yaklaşık olarak bir parabol şeklinde olan pürüzsüz bir eğimli yoldan aşağıya inmektedir. Kayakçının ağırlığı 600 N ve A noktasına ulaştığı andaki hızı 9 m/s olduğuna göre, bu anda yere uyguladığı normal kuvveti belirleyiniz. Ayrıca, A 'daki ivmesini belirleyiniz.



Çözüm

Problemi çözmek için, niçin n, t koordinatlarını kullanmayı düşünürüz?

Serbest-Cisim Diyagramı. Kayakçının A 'da bulunduğu andaki serbest-cisim diyagramı Şekil 13-14b'de gösterilmektedir. Yörünge *eğri* olduğundan, iki ivme bileşeni vardır: a_n ve a_t . a_n hesaplanabildiğinden, bilinmeyenler a_t ve N_A 'dir.

Hareket Denklemleri.

$$+\uparrow \sum F_n = ma_n; \quad N_A - 600 = \frac{600}{9.81} 3 \left(\frac{(9)^2}{\rho} \right) \quad (1)$$

$$\leftarrow \sum F_t = ma_t; \quad 0 = \frac{600}{9.81} a_t \quad (2)$$

dir.

Yörünge ρ eğrilik yarıçapı $A(0, -15 \text{ m})$ noktasında hesaplanmalıdır. Burada, $y = \frac{1}{60}x^2 - 15$, $dy/dx = \frac{1}{30}x$, $d^2y/dx^2 = \frac{1}{30}$ 'dur ve dolayısıyla $x = 0$ 'da

$$\rho = \left| \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2} \right|_{x=0} = \left| \frac{[1 + (0)^2]^{3/2}}{\frac{1}{30}} \right| = 30 \text{ m}$$

dir. Bunu Denklem 1'e yerleştirir ve buradan N_A 'yı çözersek

$$N_A = 765 \text{ N}$$

buluruz.

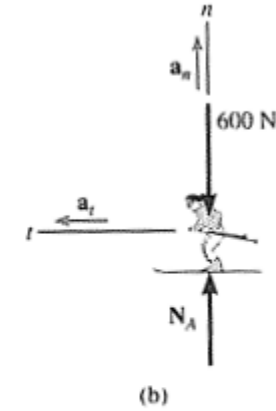
Kinematik. Denklem 2'den

$$a_t = 0$$

bulunur. Böylece,

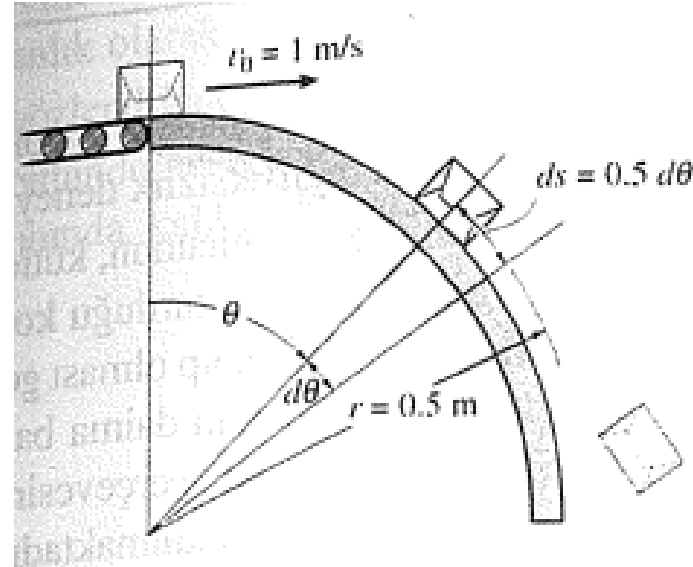
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(9)^2}{30} = 2.7 \text{ m/s}^2$$

$$a_A = a_n = 2.7 \text{ m/s}^2 \uparrow$$

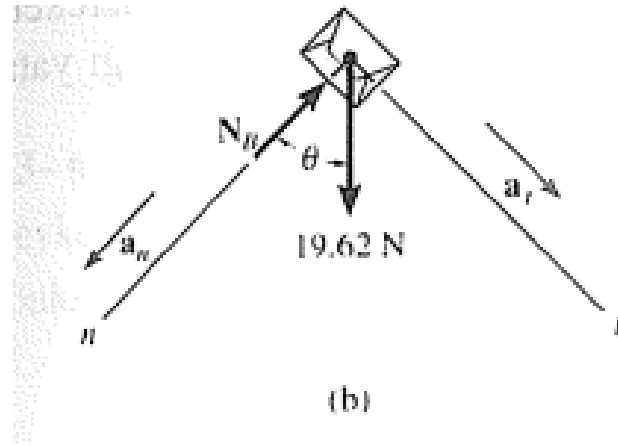


Örnek Problem

Her biri 2 kg'lık kütleye sahip paketler, Şekil 13–15a'da gösterildiği gibi, bir taşıyıcı banttandır, $v_0 = 1 \text{ m/s}$ hızıyla pürüzsüz bir dairesel rampaya aktarılıyor. Rampanın yarıçapı 0.5 m olduğuna göre, her bir paketin yüzeyi terk etmeye başladığı andaki $\theta = \theta_{\text{maks}}$ açısını belirleyiniz.



Çözüm



Serbest-Cisim Diyagramı. Her bir paketin θ genel konumunda bulunduğu andaki serbest-cisim diyagramı Şekil 13–15b’de gösterilmiştir. Her bir paket bir a_t teğetsel ivmesine sahip olmalıdır, çünkü, aşağı doğru kayarken, hızı daima artmaktadır. Ağırlığı $W = 2(9.81) = 19.62$ N’dur. Üç bilinmeyeni belirleyiniz.

Hareket Denklemleri.

$$+\swarrow \sum F_n = ma_n \quad -N_B + 19.62 \cos \theta = 2 \frac{v^2}{0.5} \quad (1)$$

$$+\searrow \sum F_t = ma_t \quad 19.62 \sin \theta = 2a_t \quad (2)$$

dir. $\theta = \theta_{\text{maks}}$ olduğu anda paket rampa yüzeyini terk etmektedir, dolayısıyla $N_B = 0$ ’dır. O halde, üç bilinmeyen v , a_t ve θ ’dır.

Kinematik. Çözüm için gerekli üçüncü denklem, a_t teğetsel ivmesi ile paketin v hızı ve θ açısı arasında bir ilişki kurulabileceğine dikkat ederek bulunabilir. $a_t ds = v dv$ ve $ds = r d\theta = 0.5 d\theta$, Şekil 13–15 a, olduğundan

$$a_t = \frac{v dv}{0.5 d\theta}$$

bulunur. Çözüm için, Denklem 2’yi Denklem 3’te kullanır ve bulunan denklemi değişkenlerine ayırırız. Sonuçta

$$v dv = 4.905 \sin \theta d\theta$$

olur. $\theta = 0^\circ$ iken $v_0 = 1$ m/s olduğuna dikkat ederek her iki yanın integralini alırsak

$$\begin{aligned} \int_1^v v dv &= 4.905 \int_{0^\circ}^{\theta} \sin \theta d\theta \\ \frac{v^2}{2} \Big|_1^v &= -4.905 \cos \theta \Big|_{0^\circ}^{\theta} \\ v^2 &= 9.81(1 - \cos \theta) + 1 \end{aligned}$$

buluruz. Bunu ve $N_B = 0$ eşitliğini Denklem 1’de kullanarak, $\cos \theta_{\text{maks}}$ için çözdüğümüzde

$$19.62 \cos \theta_{\text{maks}} = \frac{2}{0.5} [9.81(1 - \cos \theta_{\text{maks}}) + 1]$$

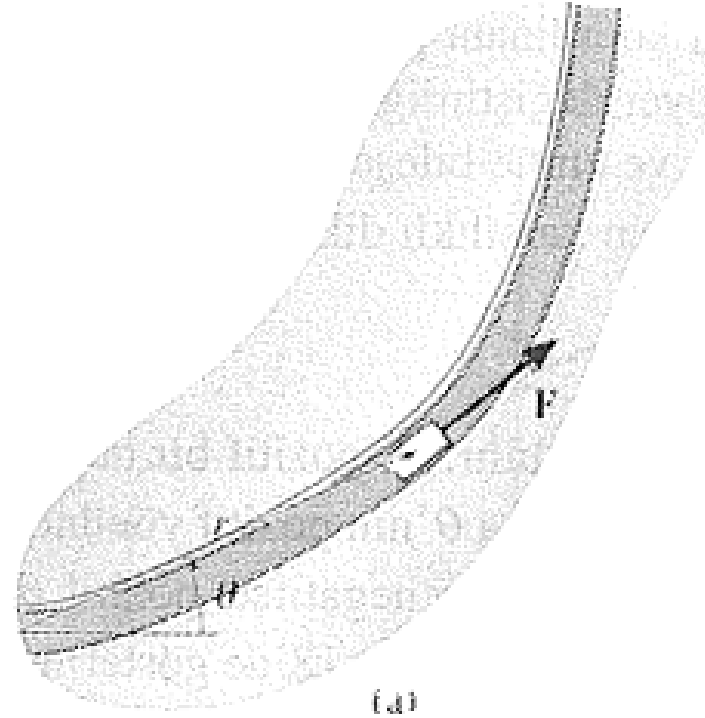
$$\cos \theta_{\text{maks}} = \frac{43.24}{58.86};$$

$$\theta_{\text{maks}} = 42.7^\circ$$

Yanıt

Örnek Problem

Şekil 13–19a'daki 10 N'luk blok, yörüngesi, t saniye cinsinden olmak üzere, kutupsal koordinatlarda $r = (3t^2)$ m ve $\theta = (0.5t)$ rad parametrik denklemleri ile belirlenecek şekilde, pürüzsüz yatay yol üzerinde hareket etmektedir. Harekete neden olan \mathbf{F} teğetsel kuvvetinin büyüklüğünün $t = 1$ s'deki değerini belirleyiniz.



Çözüm

Serbest-Cisim Diyagramı. Bloğun serbest cisim diyagramında gösterildiği gibi, Şekil 13–19b, yolun bloğa uyguladığı N normal kuvveti ve F teğetsel kuvveti, r ve θ eksenleri ile ψ açısı yapmaktadır. Bu açı Denklem 13–10'dan elde edilebilir. Bunun için, önce r ve θ arasında t 'yi yok ederek yolu $r = f(\theta)$ şeklinde ifade etmemiz gereklidir. Buradan $r = 120\theta^2$ bulunur. Ayrıca $t = 1$ s olduğunda $\theta = 0.5(1 \text{ s}) = 0.5$ rad'dır. Böylece

$$\tan \psi = \frac{r}{dr/d\theta} = \frac{120\theta^2}{120(2\theta)} \bigg|_{\theta=0.5 \text{ rad}} = 0.25$$
$$\psi = 14.04^\circ$$

olur. ψ pozitif bir büyüklük olduğundan, Şekil 13–19b'de gösterildiği gibi, r ekseninden teğete saat yönünün tersine (θ ile aynı yönde) ölçülür. Bu durumda dört bilinmeyen vardır: F , N , a_r , a_θ .

Hareket Denklemleri

$$+\nearrow \sum F_r = ma_r \quad F \cos 14.04^\circ - N \sin 14.04^\circ = \frac{10}{9.81} a_r \quad (1)$$

$$\nwarrow + \sum F_\theta = ma_\theta \quad F \sin 14.04^\circ + N \cos 14.04^\circ = \frac{10}{9.81} a_\theta \quad (2)$$

Hareket belirlendiğinden, koordinatlar ve zamana göre türevler için hesaplanabilir.

$$r = 3t^2 \bigg|_{t=1 \text{ s}} = 3 \text{ m} \quad \theta = 0.5t \bigg|_{t=1 \text{ s}} = 0.5 \text{ rad}$$

$$r = 6t \bigg|_{t=1 \text{ s}} = 6 \text{ m/s} \quad \dot{\theta} = 0.5 \text{ rad/s}$$

$$\ddot{r} = 6 \text{ m/s}^2 \quad \ddot{\theta} = 0$$

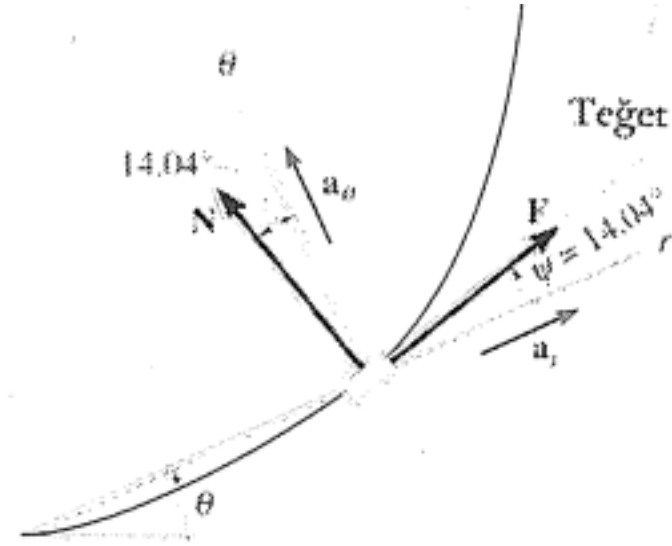
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 6 - 3(0.5)^2 = 5.25 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 3(0) + 2(6)(0.5) = 6 \text{ m/s}^2$$

dir. Denklem 1 ve 2'de yerine koyup çözersek

$$F = 6.68 \text{ N}$$

$$N = 4.64 \text{ N}$$



Ders Kitabı:

- Hibbeler, 2014. Mühendislik Mekaniği – Dinamik, Literatür Yayıncılık, İstanbul
Çevirenler: Ayşe Soyuçok, Özgün Soyuçok,
Orijinal isimi: Engineering Mechanics SI Metric Edition, Dynamics.

Kullanılan Kaynaklar:

- Ferdinand Beer, Phillip Cornwell, E. Russell Johnston 2014. Mühendisler için Vektör Mekaniği Dinamik Literatür Yayıncılık, İstanbul, Çevirmen: Osman Kopmaz, Ömer Gündoğdu.
Orijinal isimi: Vector Mechanics for Engineers: Dynamics
- Hibbeler, R. C., 2015. Engineering Mechanics: Dynamics, 14th Edition, Prentice Hall, New Jersey USA.
- Meriam, J. L. , Kraige, L. G. 2012. Engineering Mechanics: Dynamics, John Wiley & Sons, USA