

DİNAMİK - 9



Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali Dayıođlu
Ankara Üniversitesi Ziraat Fakültesi
Tarım Makinaları ve Teknolojileri Mühendisliđi Bölümü

9. HAFTA

Kapsam:

- Parçacık hareketinde İş – Enerji Yöntemi,
- Mekanik iş
- Sabit / değişken bir kuvvetin yaptığı iş
- Ağırlığın yaptığı iş
- Yay kuvvetinin yaptığı iş
- İş – enerji ilkesi
- Kaymanın neden olduğu sürtünmenin yaptığı iş
- Örnek problem çözümleri

BÖLÜM 3

Parçacık Kinetiği

Parçacık İş – Enerji Yöntemi

3.1 Mekanik iş

Mekanikte bir \mathbf{F} kuvveti, ancak parçacık kuvvet doğrultusunda yer değiştirmeye maruz kalırsa iş yapar. Parçacık yörünge üzerinde \mathbf{r} konumundan \mathbf{r}' konumuna hareket ederse, $d\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ kadar yer değiştirir.

Bir cisim F kuvvetinin etkisi altında hareket etmektedir. F kuvveti tarafından yapılan dU işi :

$$dU = F ds \cos \theta$$

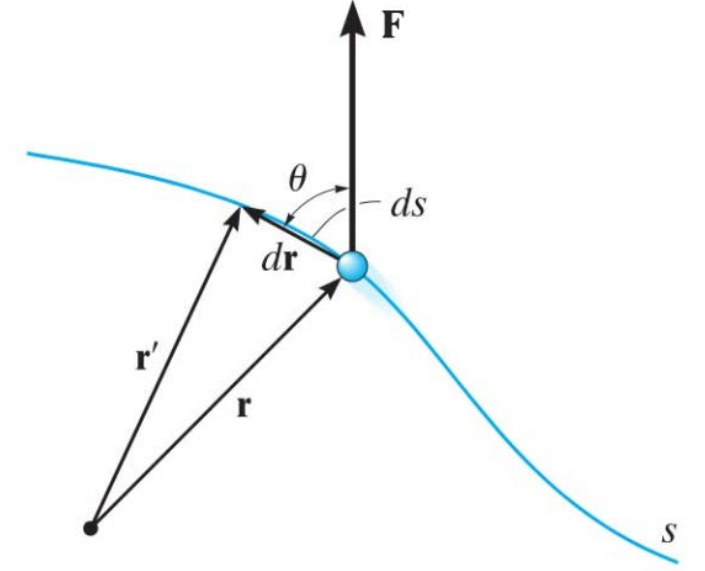
İle tanımlanan skaler bir büyüklüktür. Bir s_1 başlangıç koordinatından s_2 koordinatına kadar yapılan toplam iş için integral alınır:

$$U_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} F \cos \theta ds$$

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Not:

1. F kuvvetinin yola teğet bileşeni iş yapar.
2. Kuvvetin yola dik bileşeni iş yapmaz.

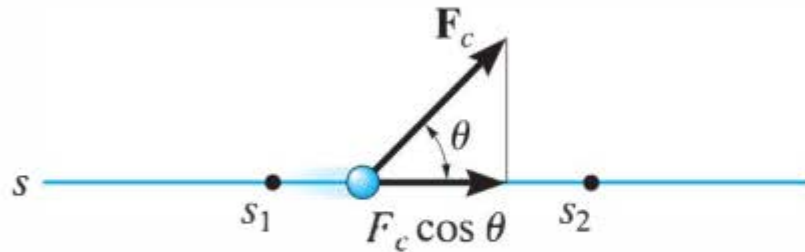


3.2 Sabit bir kuvvetin yaptığı iş

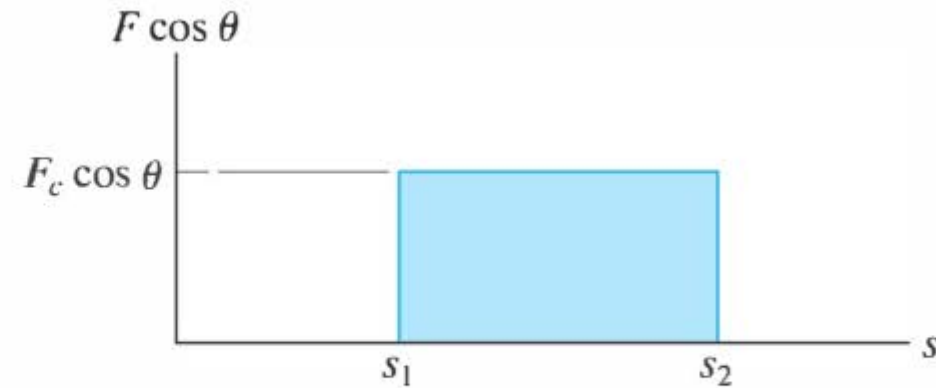
- Bir doğru boyunca hareket eden sabit bir kuvvetin yaptığı iş

$$U_{1-2} = F_c \cos \theta \int_{s_1}^{s_2} ds$$

$$U_{1-2} = F_c \cos \theta (s_2 - s_1)$$



(a)



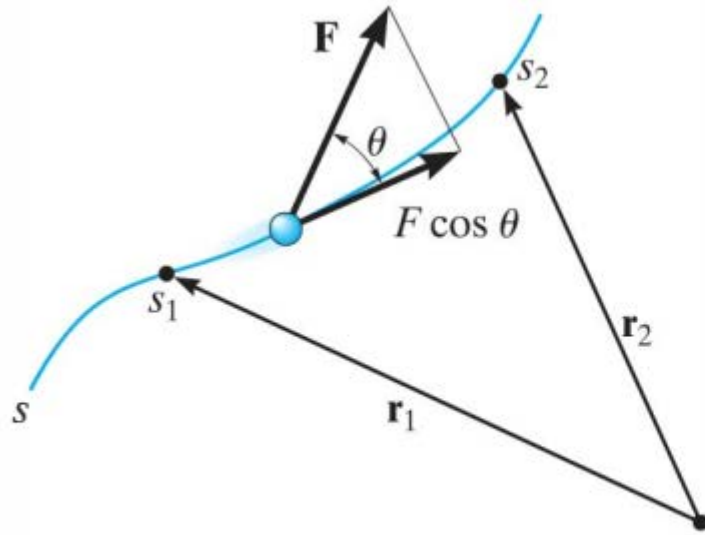
(b)

3.3 Değişken bir kuvvetin yaptığı iş

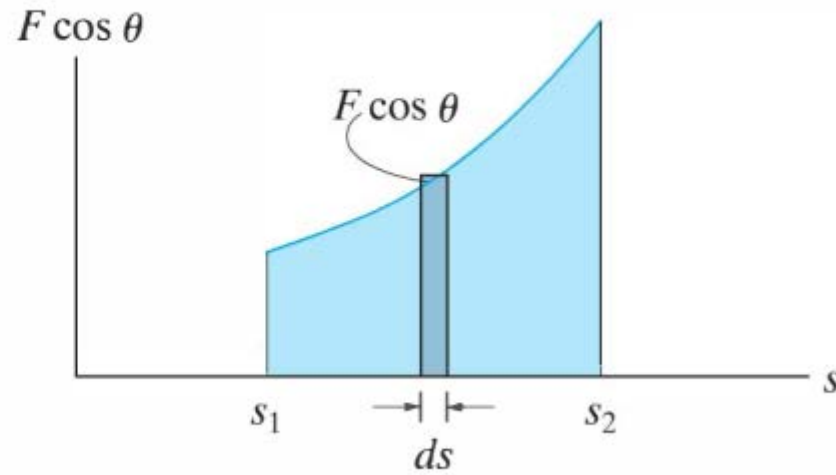
Bir F kuvveti parçacığa s yörüngesi boyunca r_1 konumundan r_2 konumuna etkiyorsa, F kuvvetinin işi integral alınarak belirlenir:

$$U_{1-2} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} F \cos \theta ds$$

F kuvveti sabit değilse, değişken $F \cos \theta$ için iş fonksiyonunun altında kalan alandır.



(a)



(b)

3.4 Kartezyen koordinatlarda iş

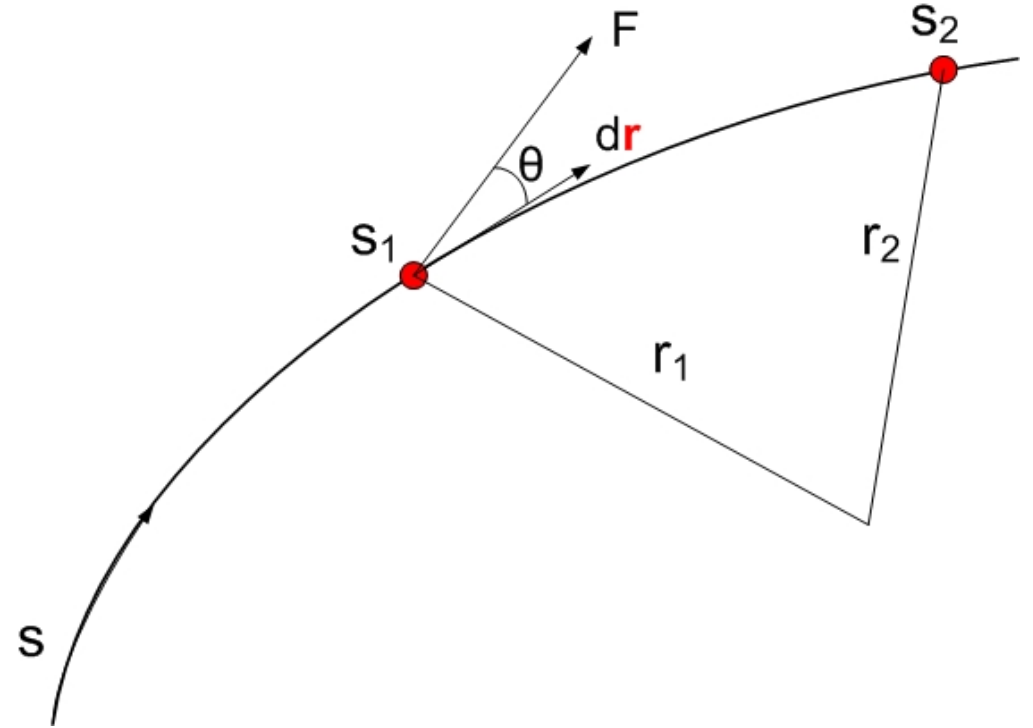
$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$$

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

İşin SI'daki birimi Nm veya Joule olarak ifade edilir.

$$U_{1-2} = \int_{r_1}^{r_2} F dr$$



3.5 Ağırlığın yaptığı iş

y_1 yüksekliğinden y_2 yüksekliğine integral alınırsa iş hesaplanır.

$$\begin{aligned}U_{1-2} &= \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} (-W\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= \int_{y_1}^{y_2} -W dy = -W(y_2 - y_1)\end{aligned}$$

$y_2 > y_1$ ise iş negatif, $y_1 > y_2$ ise iş pozitif.

$$U_{1-2} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} dr$$

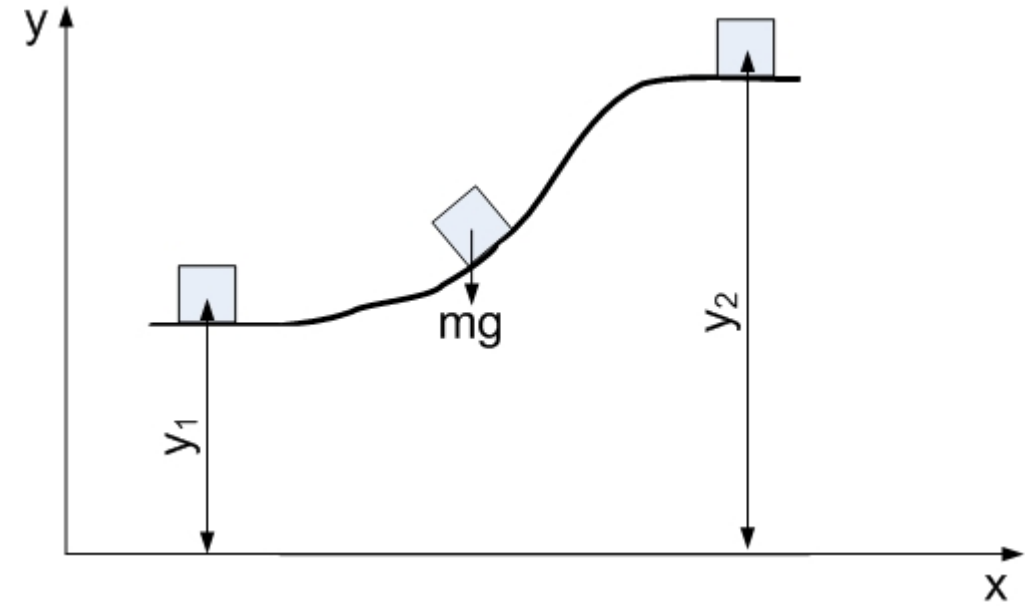
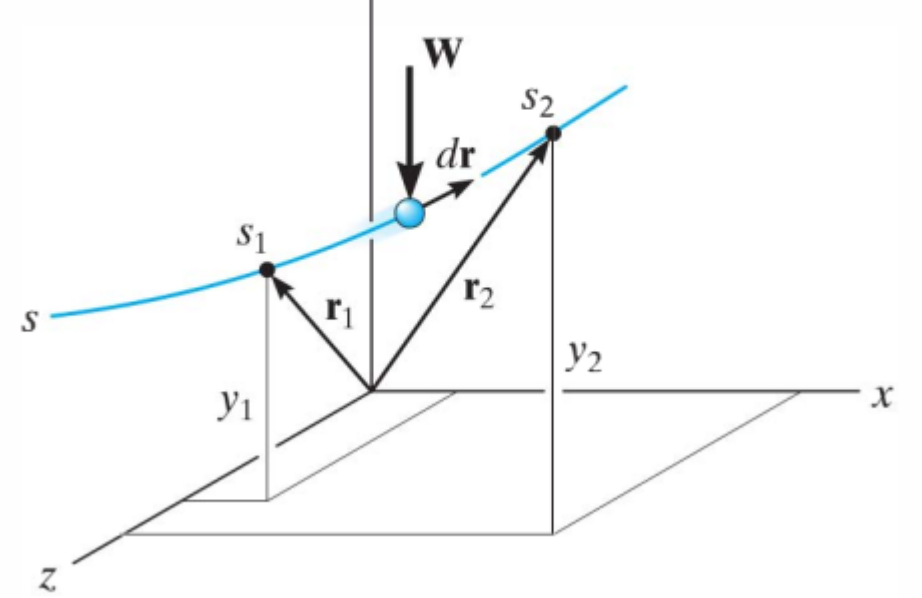
$$\int dU = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} dr = - \int_{y_1}^{y_2} mg dy$$

$$\mathbf{F} = -mg \mathbf{j}$$

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}$$

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \text{ sonuç skaler}$$

$$U_{1-2} = -mg(y_2 - y_1)$$

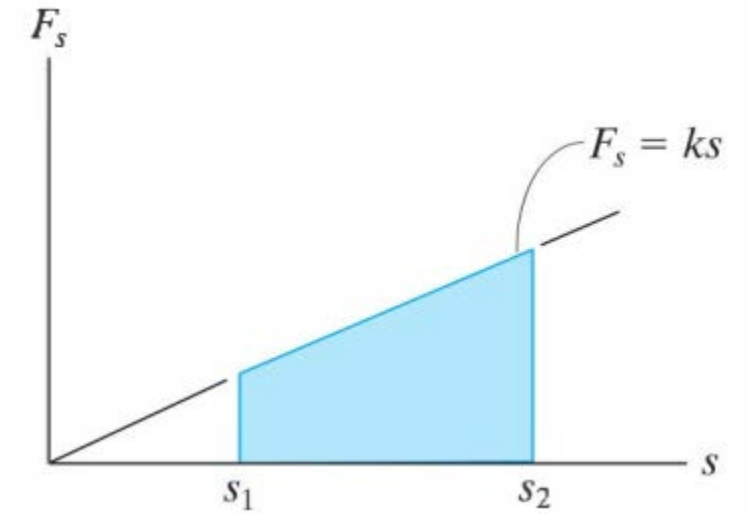
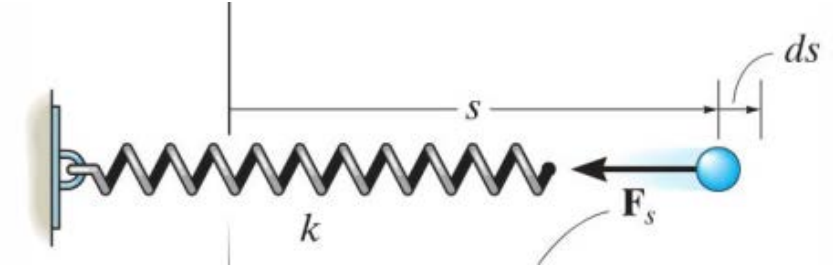
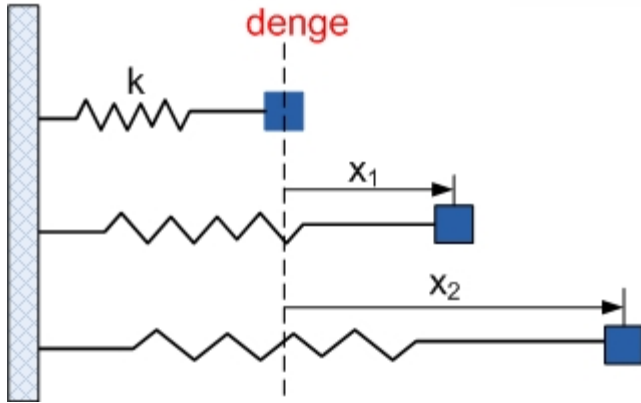


3.6 Yay kuvvetinin yaptığı iş

Yay kuvveti $F_s = ks$ ile tanımlanır. k yay sabitidir.

$$U_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} F_s ds = \int_{s_1}^{s_2} -ks ds$$

$$U_{1-2} = -\left(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2\right)$$



$$\mathbf{F} = -kx \mathbf{i}$$

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}$$

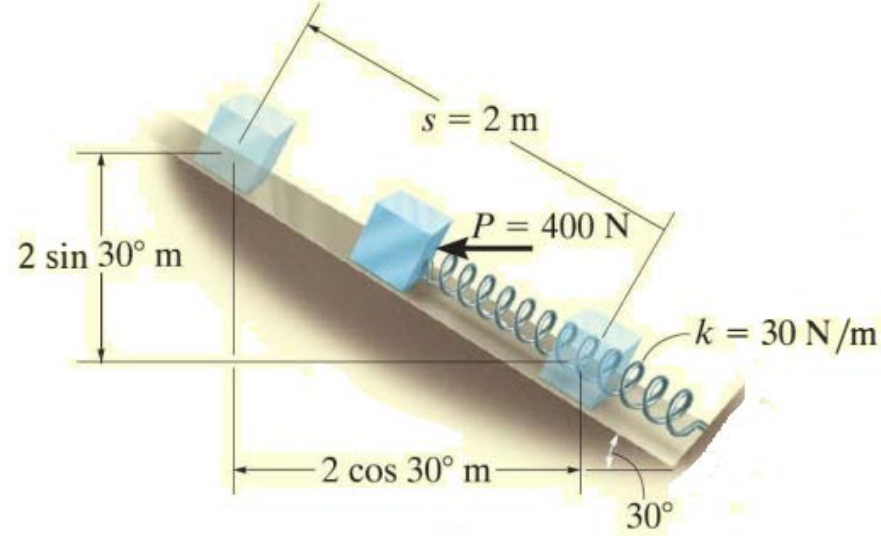
$$\int dU = \int \mathbf{F} d\mathbf{r} = -\int_{x_1}^{x_2} kx dx$$

$$U_{1-2} = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

$x_2 > x_1$ ise iş negatif,
Çünkü gidilen yol ile kuvvet ters yönlüdür.

$x_1 > x_2$ ise iş pozitif. Çünkü gidilen yol ile kuvvet aynı yönlüdür.

Şekil 14-6a'da gösterilen 10 kg'lık blok pürüzsüz düzlem üzerinde durmaktadır. Başlangıçta yay gerilmemiş durumda olduğuna göre, $P = 400$ N'luk bir yatay kuvvet bloğu $s = 2$ m yukarı ittiği zaman, blok üzerine etkiyen bütün kuvvetler tarafından yapılan toplam işi belirleyiniz.



Çözüm

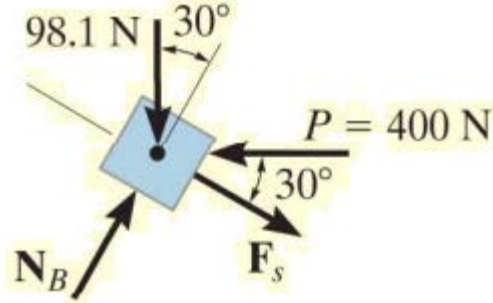
Önce, blok üzerine etkiyen bütün kuvvetleri hesaplamak için, bloğun serbest-cisim diyagramı çizilir, Şekil 14–6b.

P Yatay Kuvveti. Bu kuvvet *sabit* olduğundan, iş Denklem 14–2 kullanılarak hesaplanır. Sonuç, kuvvet ile kuvvet doğrultusundaki yer değişiminin çarpımından elde edilebilir:

$$U_p = 400 \text{ N} (2 \text{ m} \cos 30^\circ) = 692.8 \text{ J}$$

veya yer değiştirme ile yer değiştirme doğrultusundaki kuvvet bileşeninin çarpımından elde edilebilir:

$$U_p = 400 \text{ N} \cos 30^\circ (2 \text{ m}) = 692.8 \text{ J}$$



F_s Yay Kuvveti. Yay, başlangıçta gerilmemiş durumda ve son konumunda 2 m gerilmiş olduğundan, F_s'nin yaptığı iş

$$U_s = -\frac{1}{2}(30 \text{ N/m})(2 \text{ m})^2 = -60 \text{ J}$$

dir. İş niçin negatiftir?

W Ağırlığı. Ağırlık düşey yer değiştirmeye zıt doğrultuda etkilediğinden, iş negatiftir, yani

$$U_w = -98.1 \text{ N} (2 \text{ m} \sin 30^\circ) = -98.1 \text{ J}$$

dir. Yer değiştirme doğrultusundaki ağırlık bileşenini de göz önüne almanın da mümkün olduğuna dikkat edilmelidir:

$$U_w = -(98.1 \text{ N} \sin 30^\circ)2 \text{ m} = -98.1 \text{ J}$$

N_B Normal Kuvveti. Bu kuvvet *iş yapmaz*, çünkü *daima* yer değiştirmeye diktir.

Toplam İş. Blok 2 m yer değiştirdiği zaman, bütün kuvvetlerin yaptığı iş

$$U_T = 692.8 - 60 - 98.1 = 535 \text{ J} \quad \text{Yanıt}$$

3.7 İş – Enerji İlkesi

s yörüngesi üzerinde ki r konumunda bulunan bir P parçacığı göz önüne alalım. Parçacık bir m kütlesine sahip ve $\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F}$ bileşkesi ile gösterilen dış kuvvetler sisteminin etkisinde ise, hareket denklemi $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ dır. Parçacık s_1 den s_2 ye kadar yer değiştirdiği zaman kuvvetler tarafından yapılan iş:

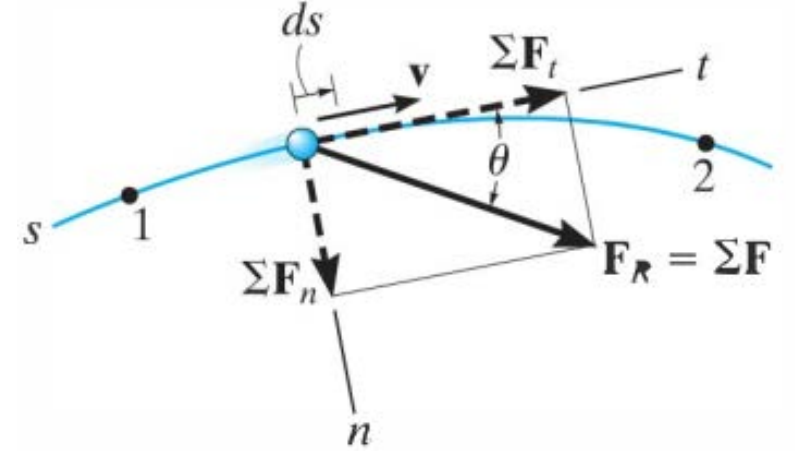
$$\Sigma F_t = ma_t \quad \rightarrow \quad a_t = v dv/ds$$

$$\Sigma \int_{s_1}^{s_2} F_t ds = \int_{v_1}^{v_2} mv dv$$

$$\Sigma \int_{s_1}^{s_2} F_t ds = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\Sigma U_{1-2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

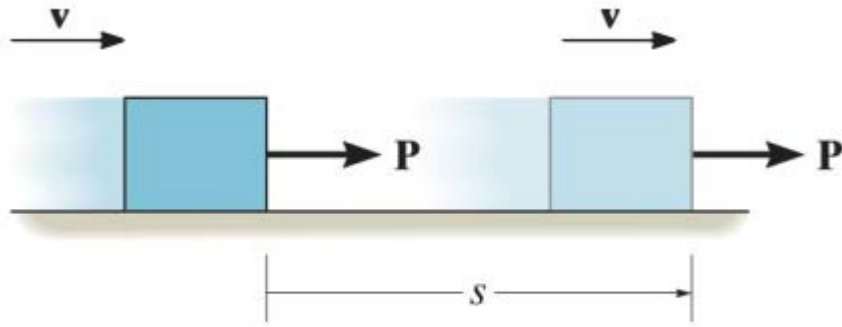
$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$



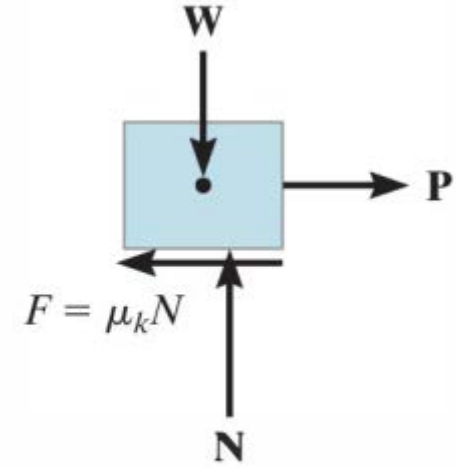
Not:

- Kinetik enerji skaler olup; birimi Joule (J) dir.
- Kinetik enerji daima pozitiftir.
- İş pozitif yada negatif olabilir. Birimi J dur.

3.8 Kaymanın neden olduğu sürtünmenin yaptığı iş



(a)



(b)

$$\frac{1}{2}mv^2 + Ps - \mu_k Ns = \frac{1}{2}mv^2$$

$$P = \mu_k N$$

3.9 Analiz prosedürü

Enerji korumu denklemi hız, yer değiştirme ve konservatif kuvvet sistemlerini içeren problemleri çözmek için kullanılır. Burada, yörünge üzerinde sadece iki noktada potansiyel ve kinetik enerjiler belirlenir.

Serbest cisim diyagramı - (SCD)

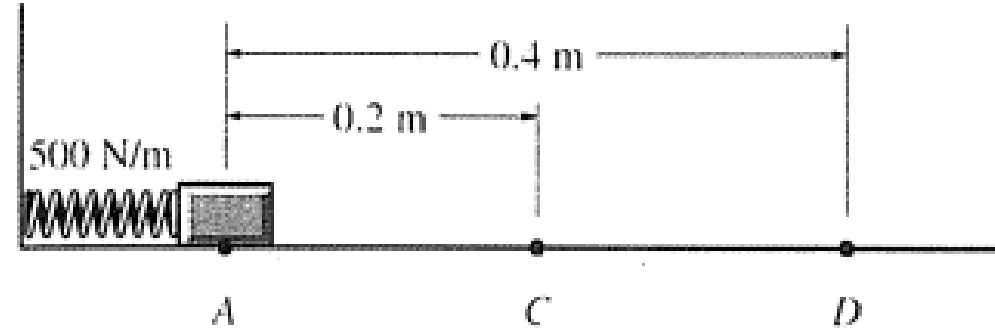
- Parçacığın ilk ve son konumlarına göre SCD çizilir. Bir parçacık üzerinde iş yapan, aynı zamanda yol üzerinde hareket ettiren tüm kuvvetler diyagram üzerinde gösterilir.

İş – Enerji İlkesi

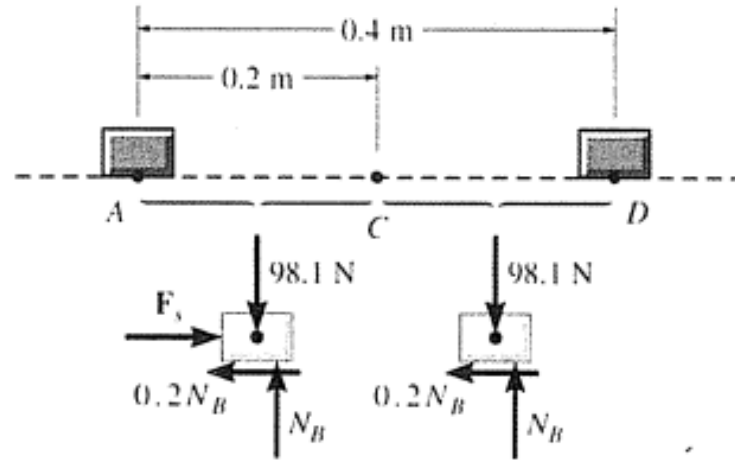
- İş – enerji ilkesi $T_1 + \sum U_{1-2} = T_2$ uygulanır.
- Başlangıçtaki ve son noktalardaki kinetik enerjiler, hızın karesinden hesaplandığı için pozitiftir. $T = \frac{1}{2} m v^2$
- Bir kuvvetin etki yönünde parçacık yer değiştiriyorsa bu kuvvet iş yapar.
- Yer değiştirmenin fonksiyonu olan kuvvetlerin integrali alınarak iş hesaplanabilir. Grafik olarak, iş kuvvet – yer değiştirme eğrinin altında kalan alandır.
- Bir ağırlığın işi ağırlığın büyüklüğü ve dikey yer değiştirmenin çarpımı ile hesaplanır. $U_w = W y$
- Bir yayın işi $U_s = \frac{1}{2} k s^2$ ile hesaplanır. k yay katsayısı, s uzama

Örnek Problem

Şekil 14–11a’da gösterilen 10 kg’lık bir blok yatay düzlemde durmaktadır. Bloğa bağlı olmayan ve yay sabiti $k = 500 \text{ N/m}$ olan yay, başlangıçta C ’den A ’ya 0.2 m sıkıştırılıyor. Bloğun A ’da durağan halden bırakıldıktan sonra, D noktasını geçtiği andaki hızını belirleyiniz. Blok ve düzlem arasındaki kinetik sürtünme katsayısı $\mu_k = 0.2$ ’dir.



Çözüm



Bu problem niçin iş ve enerji ilkesi kullanılarak çözülebilir?

İş (Serbest-Cisim Diyagramı). Blok için iki serbest-cisim diyagramı Şekil 14-11b'de gösterilmektedir. Blok, 0.2 m uzunluğundaki AC yolu boyunca F_s yay kuvvetinin etkisi altında hareket etmekte, sonra düzlem boyunca D noktasına kayarak hareketini sürdürmektedir. Her bir serbest-cisim diyagramına göre, $\sum F_y = 0$ ve dolayısıyla $N_B = 98.1$ N'dur. Yer değiştirme sırasında sadece yay ve sürtünme kuvvetleri iş yapar. Yay kuvveti A'dan C'ye pozitif iş yapar, buna karşın, sürtünme kuvveti ısı ortaya çıkarır ve negatif iş yapar. Niçin?

İş ve Enerji İlkesi.

$$\{T_A\} + \{\sum U_{A-D}\} = \{T_D\}$$

$$\left\{\frac{1}{2}m(v_A)^2\right\} + \left\{\frac{1}{2}ks_{AC}^2 - (0.2N_B)s_{AD}\right\} = \left\{\frac{1}{2}m(v_D)^2\right\}$$

$$\{0\} + \left\{\frac{1}{2}(500 \text{ N/m})(0.2 \text{ m})^2 - 0.2(98.1 \text{ N})(0.4 \text{ m})\right\} = \left\{\frac{1}{2}(10 \text{ kg})(v_D)^2\right\}$$

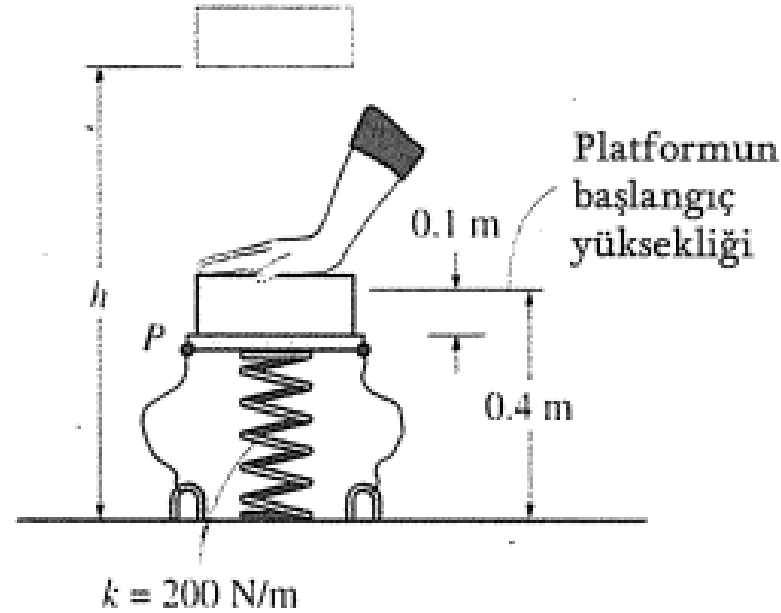
dir. Buradan v_D çözümlenerek,

$$v_D = 0.656 \text{ m/s} \rightarrow$$

Yanıt

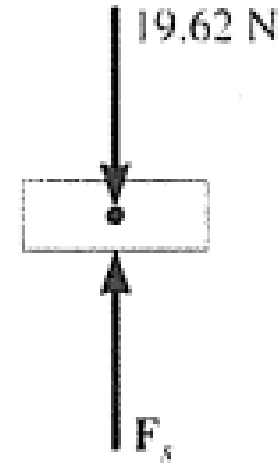
Örnek Problem

Şekil 14-12a'da gösterilen P platformu, ihmal edilebilir bir kütleye sahiptir ve üzeri boşken yayı 0.6 m sıkıştırılmış olarak tutan 0.4 m uzunluğundaki iplerle aşağıya bağlanmıştır. Platform üzerine 2 kg'lık bir blok yerleştirildiğine ve platform 0.1 m aşağı itildikten sonra, durağan halden serbest bırakıldığına göre, bloğun havada yükseleceği, yerden ölçülen maksimum h yüksekliğini belirleyiniz.



Çözüm

İş (Serbest-Cisim Diyagramı). Blok, durağan halden serbest bırakıldığı ve sonra maksimum yüksekliğe ulaştığı için, ilk ve son hız sıfırdır. Bloğun, platformla temas halinde bulunduğu zamana ait serbest-cisim diyagramı Şekil 14–12b’de gösterilmiştir. Ağırlık negatif iş, yay kuvveti pozitif iş yapar. Niçin? Özellikle, yaydaki *başlangıç sıkışması* $s_1 = 0.6 \text{ m} + 0.1 \text{ m} = 0.7 \text{ m}$ ’dir. yayın, iplerden dolayı *son sıkışması* (blok platformu terkettikten sonra) $s_2 = 0.6 \text{ m}$ ’dir. Bloğun altı $(0.4 \text{ m} - 0.1 \text{ m}) = 0.3 \text{ m}$ yüksekliğinden, son h yüksekliğine ulaşır.



İş ve Enerji İlkesi.

$$\{T_1\} + \{\Sigma U_{1-2}\} = \{T_2\}$$

$$\left\{\frac{1}{2}mv_1^2\right\} + \left\{-\left(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2\right) - W \Delta y\right\} = \left\{\frac{1}{2}mv_2^2\right\}$$

dir. Burada, $s_1 > s_2$ olduğuna dikkat edelim, dolayısıyla, yayın yaptığı iş, gerçekten pozitiftir. Böylece,

$$\{0\} + \left\{-\left[\frac{1}{2}(200 \text{ N/m})(0.6 \text{ m})^2 - \frac{1}{2}(200 \text{ N/m})(0.7 \text{ m})^2\right] - (19.62 \text{ N})[h - (0.3 \text{ m})]\right\} = \{0\}$$

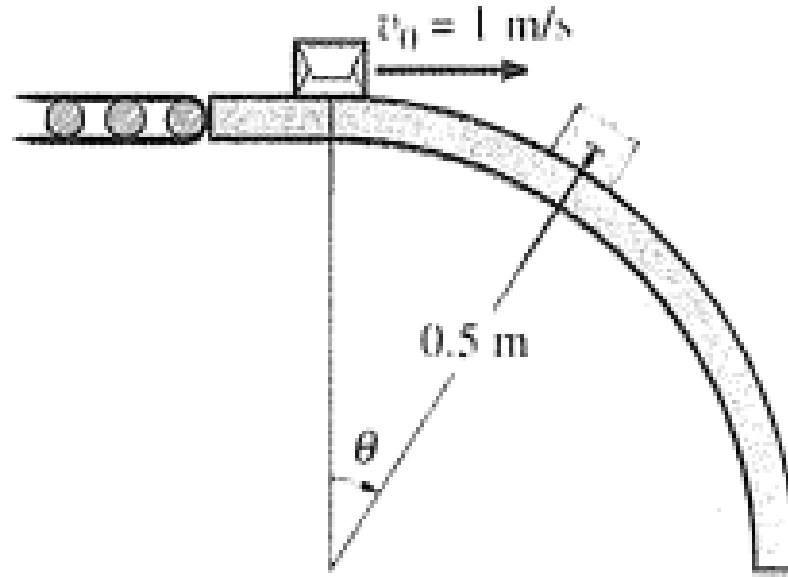
olur. Bunun çözümünden

$$h = 0.963 \text{ m}$$

Yanıt

Örnek Problem

Şekil 14-13a'da gösterildiği gibi, 2 kg'lık paketler, $v_0 = 1$ m/s hızıyla bir taşıyıcıdan pürüzsüz bir dairesel rampaya aktarılmaktadır. Rampanın yarıçapı 0.5 m olduğuna göre, her bir paketin yüzeyden ayrılmaya başladığı andaki $\theta = \theta_{\text{maks}}$ açısını belirleyiniz.



Çözüm

İş (Serbest-Cisim Diyagramı). Şekil 14–13b'nin incelenmesinden, yer değiştirme sırasında sadece $W = 2(9.81) = 19.62$ N ağırlığının iş yaptığı anlaşılır. Bu iş pozitif mi, yoksa negatif midir? Bir paketin, $\theta = \theta_{\text{maks}}$ olduğunda yüzeyi terkettiği varsayılırsa, ağırlığın düşey yer değiştirmesi, şekilde gösterildiği gibi, $0.5(1 - \cos \theta_{\text{maks}})$ olur.

İş ve Enerji İlkesi.

$$\begin{aligned} \{T_1\} + \{\Sigma U_{1-2}\} &= \{T_2\} \\ \left\{\frac{1}{2}(2 \text{ kg})(1 \text{ m/s})^2\right\} + \{19.62 \text{ N}(0.5 \text{ m})(1 - \cos \theta_{\text{maks}})\} &= \left\{\frac{1}{2}(2 \text{ kg})v_2^2\right\} \\ v_2^2 &= 9.81(1 - \cos \theta_{\text{maks}}) + 1 \end{aligned} \quad (1)$$

dir.

Hareket Denklemi. Denklem 1 de iki bilinmeyen vardır: θ_{maks} ve v_2 . Bu iki değişkenle ilgili ikinci bir denklem, serbest-cisim diyagramındaki kuvvetlere *dik doğrultuda* hareket denklemini uygulayarak elde edilebilir. Buna göre,

$$+\swarrow \Sigma F_n = ma_n; \quad -N_B + 19.62 \text{ N} \cos \theta = (2 \text{ kg}) \left(\frac{v^2}{0.5 \text{ m}} \right)$$

bulunur. Paket $\theta = \theta_{\text{maks}}$ 'da rampayı terkettiği zaman, $N_B = 0$ ve $v = v_2$ ve dolayısıyla

$$\cos \theta_{\text{maks}} = \frac{v_2^2}{4.905} \quad (2)$$

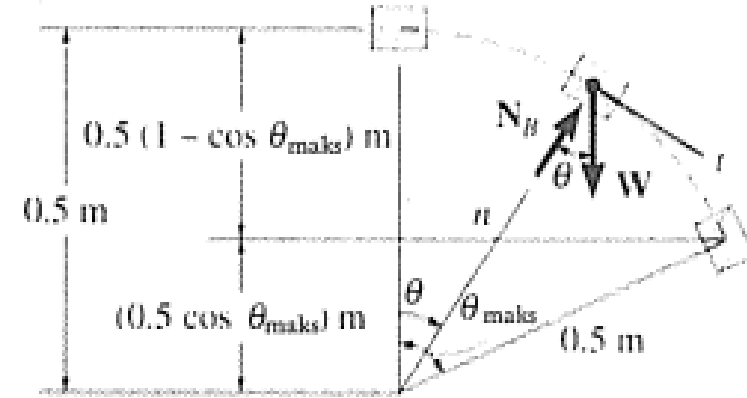
olur. Denklem 1 ve 2 arasında v_2^2 bilinmeyeni yok edilerek,

$$4.905 \cos \theta_{\text{maks}} = 9.81(1 - \cos \theta_{\text{maks}}) + 1$$

bulunur. Bunun çözümünden,

$$\cos \theta_{\text{maks}} = 0.735$$

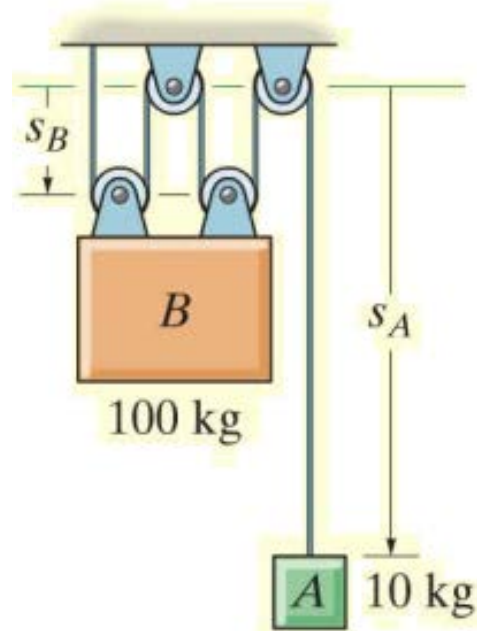
$$\theta_{\text{maks}} = 42.7^\circ$$



Yanıt

Örnek Problem

Şekil 14–14a’da gösterilen A ve B blokları, sırasıyla, 10 kg ve 100 kg’lık kütlelere sahiptir. B ’nin durağan halde bırakıldığı noktadan, hızının 2 m/s olduğu noktaya kadar katettiği mesafeyi belirleyiniz.



Çözüm

Bu problem, bloklar ayrı ayrı ele alınarak ve her bir bloğa iş ve enerji ilkesi uygulanarak çözülebilir. Bununla birlikte, kablo kuvvetinin (bilinmiyor) yaptığı iş, A ve B bloklarının bir *sistem* olarak birlikte düşünülmesiyle yapılacak analizle yok edilebilir. Çözüm, iş ve enerji ve kinematik denklemlerinin eş zamanlı çözümlerini gerektirir. İşaret uyuşumumuzla uyumlu olması için, her iki bloğun pozitif *aşağı* yönde hareket ettiğini varsayacağız.

İş (Serbest-Cisim Diyagramı). Sistemin serbest-cisim diyagramında gösterildiği gibi, Şekil 14–13b, T kablo kuvveti ve R_1 ve R_2 tepkileri *iş yapmaz*, çünkü bunlar mesnetlerdeki tepkileri gösterir ve dolayısıyla, bloklar yer değiştirirken hareket etmezler. Her iki ağırlık da pozitif iş yapar, çünkü yukarıda ifade edildiği gibi, bunların aşağı doğru hareket ettiği varsayılmaktadır.

İş ve Enerji İlkesi. Blokların durağan halden bırakıldıkları dikkate alınarak,

$$\{\Sigma T_1\} + \{\Sigma U_{1-2}\} = \{\Sigma T_2\}$$

$$\left\{\frac{1}{2}m_A(v_A)_1^2 + \frac{1}{2}m_B(v_B)_1^2\right\} + \{W_B \Delta s_B + W_A \Delta s_A\} = \left\{\frac{1}{2}m_A(v_A)_2^2 + \frac{1}{2}m_B(v_B)_2^2\right\}$$

$$\{0 + 0\} + \{981 \text{ N}(\Delta s_B) + 98.1 \text{ N}(\Delta s_A)\} =$$

$$\left\{\frac{1}{2}(10 \text{ kg})(v_A)_2^2 + \frac{1}{2}(100 \text{ kg})(2 \text{ m/s})^2\right\} \quad (1)$$

Kinematik. Kesim 12.8’de ele alınan kinematik yöntemleri uygulanarak, Şekil 14–14a’dan, kablunun bütün düşey parçalarının toplam l uzunluğunun, herhangi bir anda, s_A ve s_B konum koordinatları cinsinden

$$s_A + 4s_B = l$$

şeklinde ifade edilebileceği görülür. Dolayısıyla konumdaki bir değişme,

$$\Delta s_A + 4 \Delta s_B = 0$$

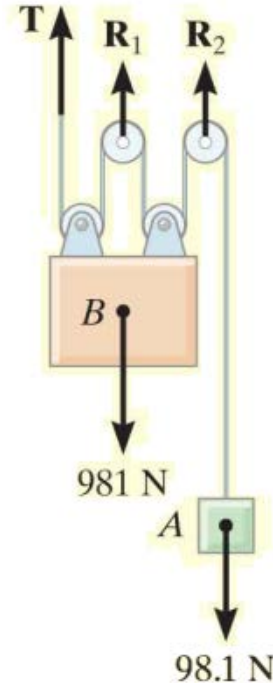
$$\Delta s_A = -4 \Delta s_B \quad (2)$$

yer değiştirme denklemini ortaya çıkarır. Beklendiği gibi, bu yer değiştirmelerin her ikisi de aşağı doğru pozitiftir. Zamana göre türev alınarak,

$$v_A = -4v_B = -4(2 \text{ m/s}) = -8 \text{ m/s}$$

bulunur. Denklem 2’deki eksi işaretini dikkate alarak bu sonucu Denklem 1’e yerleştirirsek,

$$\Delta s_B = 0.883 \text{ m} \downarrow$$



Önemli noktalar:

- İş-enerji yöntemi skaler ifadelerden oluşur.
- Newton bağıntıları vektörel ifadelerden oluşur.
- İş-enerji yönteminde cisme ait hızlar elde edilebilir.
- Kuvvet – ivme yönteminde ivmeler elde edilir.
- İvme soruluyorsa iş-enerji yöntemi ile sonuç alamayız.

Ders Kitabı:

- Hibbeler, 2014. Mühendislik Mekaniği – Dinamik, Literatür Yayıncılık, İstanbul
Çevirenler: Ayşe Soyuçok, Özgün Soyuçok,
Orijinal isimi: Engineering Mechanics SI Metric Edition, Dynamics.

Kullanılan Kaynaklar:

- Ferdinand Beer, Phillip Cornwell, E. Russell Johnston 2014. Mühendisler için Vektör Mekaniği Dinamik Literatür Yayıncılık, İstanbul, Çevirmen: Osman Kopmaz, Ömer Gündoğdu.
Orijinal isimi: Vector Mechanics for Engineers: Dynamics
- Hibbeler, R. C., 2015. Engineering Mechanics: Dynamics, 14th Edition, Prentice Hall, New Jersey USA.
- Meriam, J. L. , Kraige, L. G. 2012. Engineering Mechanics: Dynamics, John Wiley & Sons, USA