Doğrusal Programlama Modeli – 1

Giriş

Doğrusal Programlama Nedir?

- Bir Doğrusal Programlama Modeli doğrusal kısıtlar altında (bu kısıtları ihlal etmeden) bir doğrusal fonksiyonun (amaç fonksiyonu) değerini maksimize yada minimize etmeye çalışır.
- Böylece karar değişkenlerinin optimal değerlerine ulaşılır.
- Doğrusal Programlama belli bir amacı gerçekleştirmek için sınırlı kaynakların etkin kullanımını ve çeşitli seçenekler arasında en uygun dağılımını sağlayan matematiksel bir tekniktir.

Doğrusal Programlama Modelleri Neden Önemlidir?

- Doğrusal Programlama modellerinin Çözümü İçin Kullanılabilen Etkin Çözüm teknikleri Vardır

- Doğrusal Programlama Modellerinin Çözümü İçin Geliştirilen Yazılımlar Çözüm Sonrası Analizler Açısından Oldukça Güçlüdürler

- Bir çok Gerçek Hayat Problemi DP İle Modellenebilir

- Üretim, Pazarlama, Finans, Reklam, Tarım, Enerji gibi bir çok alanda bildik iyi uygulamalar vardır ➔

Doğrusal Programlama ile Modellenebilecek Karar Problemleri

Amaç ya "faydayı maksimize etmek" ya da "maliyeti minimize etmek" olmak üzere doğrusal programlama ile aşağıdaki tipteki problemler modellenebilir:

- <u>Ürün yöneticisi</u>: Her üründen ne kadar üretecek?
- <u>Yatırımcı/Finansman Müdürü</u>: Elindeki fonu hangi yatırım enstrümanlarına ne kadar dağıtmalı?
- <u>İnsan kaynakları yöneticisi</u>: Hangi saatlerde (vardiyede) kaç personeli çalıştıracak?
- <u>Pazarlama direktörü</u>: Elindeki reklam bütçesini hangi reklam medyasına ne kadar dağıtmalı?
- <u>Belediye</u>: Hangi saatlerde hangi semtlere ne sıklıkta taşıma aracı tahsis edecek?
- <u>Bir rafineri yöneticisi</u>: Talep edilen petrol ürünleri üretilirken hangi hammaddelerden ne kadar kullanılacak?
- <u>Üniversite Yönetimi</u>: Hangi derslikler hangi saatlerde hangi bölümlerin kullanımına verilecek?
- <u>DPT ve Tarım Bakanlığı</u>: Önümüzdeki yıl hangi bölgelerde hangi ürünlerin ekilmesinin teşvik edilmesi gerekir?
- <u>Lojistik müdürü</u>: Hangi fabrikadan hangi şehirlere ne kadarlık partiler halinde ürün taşınacak?

Bir Doğrusal Programlama Modelinin Bileşenleri

- Bir Doğrusal Programlama Modeli Şu Bileşenlere Sahiptir:
  - Bir grup karar değişkeni.
  - Bir (Doğrusal) Amaç Fonksiyonu.
  - Bir grup (doğrusal) kısıtlık.

Doğrusal Programlama Modelinin Varsayımları

- ***Doğrusallık (Orantılılık):*** *Modeldeki herhangi bir değişkenin değerindeki değişime karşılık yer aldığı fonksiyonun değeri bu değişkenin önündeki sabit oranında değişir.*

  Bu varsayıma göre modelde amaç ve kısıt fonksiyonlarının tamamı doğrusal fonksiyonlar → olarak ifade edilmelidirler.
- ***Kısıtlılık:*** *Kaynakların kıt (sınırlı) olması ve bu sınırlılık derecesinin bilinmesi gerekir.*
- ***Bölünebilirlik:*** *Modeldeki değişkenler kesirli (tamsayı olmayan) değerler alabilirler.*
- *Bunların dışında toplanabilirlik (değişkenlerin katkıları toplanabilir) ve belirlilik (katsayılar ve model belirli / deterministiktir) varsayımları da vardır.*

Doğrusallık Varsayımı: Doğrusal Fonksiyonlar

- $y = mx+b$ bir doğrunun denklemidir
  - ör. $y = -4/3\ x + 6$
  - düzenlersek: $\underbrace{4x + 3y}_{\text{2 Değişkenli Bir Doğrusal Fonk.}} = 18$

- *(Hatırlatma: b katsayısı değişirse doğru paralel kayar, m değişirse eğimi değişir)*

Bir Doğrusal Fonksiyon **bir pozitif, negatif veya 0 sabitinin değişkenlerle çarpımlarının toplamıdır; ör.**

$$5X_1 - 4X_2 + 0X_3 + 6X_4$$

X_1^2, X_1/X_2, e^{-X2}, $\sqrt{X_1}$, **vb. yer almaz**

Doğrusal Kısıtlar

- Doğrusal Kısıtlar Şu Şekle Sahiptir

  <Bir Doğ. Fonksiyon> <Bir İlişki> <Bir Sabit>

  - İlişki Aşağıdakilerden Biridir:

    $\leq$, $=$, $\geq$ ---- her birinde "eşitlik" yer alır

- Örnekler:

$$
\begin{array}{lllllll}
4X_1 & + 5X_2 & - 6X_3 & & + 2X_5 & \leq & 34 \\
2X_1 & - 5X_2 & & + 1X_4 & & \geq & 47 \\
 & - 2X_2 & + 8X_3 & + 9X_4 & + 2X_5 & = & 67 \\
X_1 & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & X_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Bir Doğrusal Programlama Modeli Örneği

$$
\begin{array}{llllll}
\text{MAX} & 4X_1 & & + 7X_3 & - 6X_4 & \\
\text{s.t.} & 2X_1 & + 3X_2 & & - 2X_4 & = 20 \\
 & & - 2X_2 & + 9X_3 & + 7X_4 & \geq 10 \\
 & -2X_1 & + 3X_2 & + 4X_3 & + 8X_4 & \leq 35 \\
 & & X_2 & & & \leq 5 \\
\end{array}
$$

Bütün X'ler ≥ 0

İlgili Kısıtlar Altında

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0$

AK ŞİRKETİ ÖRNEĞİ

1.Aşama: PROBLEMİN TANIMLANMASI

Ak Boya Şirketi Ankara, İzmir ve İstanbul şehirlerinde perakende satış mağazaları olan bir toptancıdır. (M1, M2, M3)

Şirket, her ay, mağazalarına diğer ürünlerin yanı sıra kendi markası olan boyadan da yollamaktadır.

AK, kendisine ait boyayı Kütahya'da bir fabrikada üretmektedir. (D1)

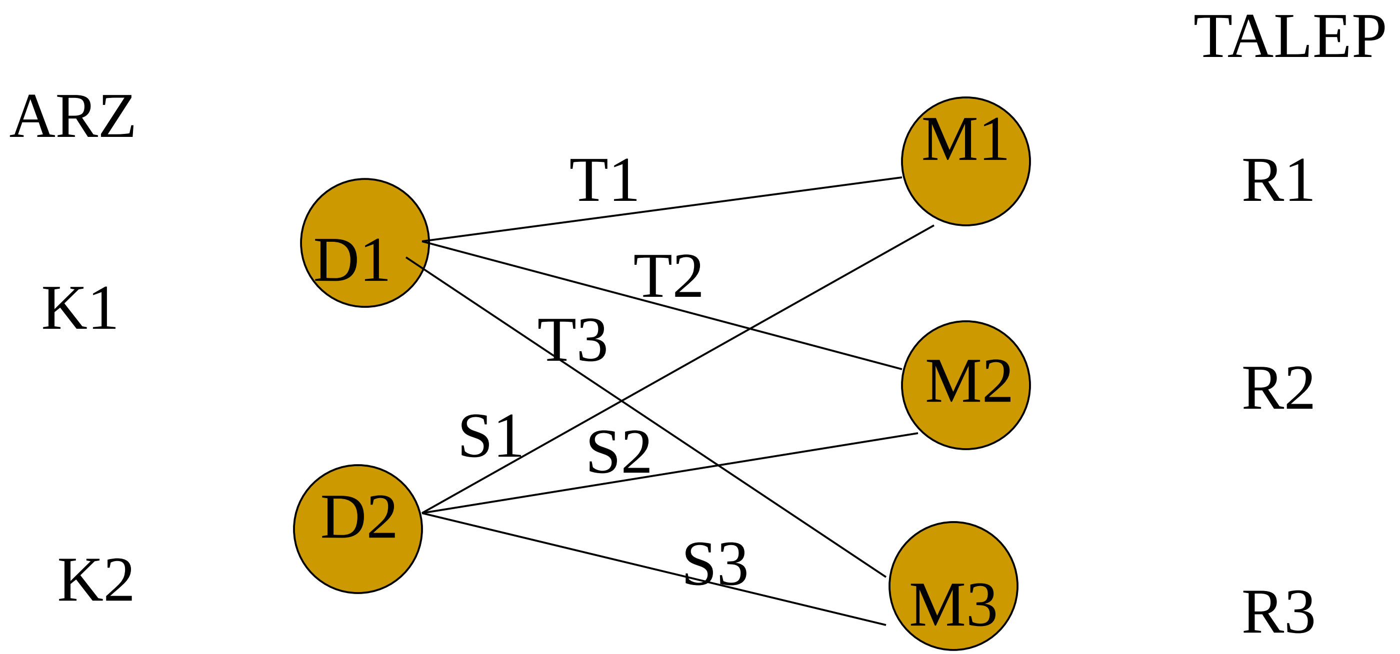
Fabrikanın üretim kapasitesi bazı aylarda talebi karşılayamamasına karşılık, şirket tarafından yapılan bir çalışma fabrikada yapılacak bir kapasite artırımının maliyet açısından çok etkin olmadığını ortaya çıkarmıştır. Bu nedenle talebin karşılanması için şirket, Mersin'deki bir boya üreticisi ile kendi adına boya üretimi için anlaşmıştır.. (D2)

PROBLEM, kapasite artırımına gidilmeyeceği kaydıyla, en düşük maliyetle gerçekleştirilebilecek bir dağıtım planının belirlenmesidir.

AK ŞİRKETİ ÖRNEĞİ

2. Aşama: MODELLEME

Modelin Grafik Temsili



AK ŞİRKETİ ÖRNEĞİ

2. Aşama: MODELLEME

<u>Karar Değişkenlerinin Belirlenmesi</u>

X1 : ***Fabrikadan Ankara Mağazasına*** *yollanan boya miktarı*

X2 : ***Fabrikadan İzmir Mağazasına*** *yollanan boya miktarı*

X3 : ***Fabrikadan İstanbul Mağazasına*** *yollanan boya miktarı*

X4 : ***Mersinden Ankara Mağazasına*** *yollanan boya miktarı*

X5 : ***Mersinden İzmir Mağazasına*** *yollanan boya miktarı*

X6 : ***Mersinden İstanbul Mağazasına*** *yollanan boya miktarı*

X1, X2…X6 ***birimi ton (boya)*** *olsun.*

AK ŞİRKETİ ÖRNEĞİ

2. Aşama: MODELLEME

(Amaç ve Kısıtların Belirlenmesi ile MODELİN GELİŞTİRİLMESİ)

Amacımız aylık üretim, dağıtım ve satın alma maliyetlerini minimum kılacak bir dağıtım planı oluşturmaktır.

Bu planı oluştururken bizi sınırlayan koşullar,

1. Kütahya fabrikası kapasitesinin (K1) üzerinde üretim yapamamaktadır,
2. Aracıdan satın alınabilecek boya miktarının üst sınırı (K2) bellidir.
3. Bütün mağazaların siparişleri, yani talep (R1,R2,R3) karşılanmalıdır.

AK ŞİRKETİ ÖRNEĞİ – Amaç Fonksiyonunun Yazılması (1)

Fabrikada üretilen bir ton boyanın üretim maliyeti **M**, fabrikadan Ankara, İzmir ve İstanbul'a gönderilme maliyeti **T1, T2 ve T3**;

Benzer şekilde Mersinden satın alınan boyanın 1 ton maliyeti **C,** Ankara ,İzmir ve İstanbul'a nakil maliyeti de **S1, S2 ve S3** olsun.

Buna göre toplam maliyetimiz;

"**Ankara** Mağazasına gelen boyaların maliyeti (üretim + nakil) **+ İzmir** mağazasına gelen boya maliyeti **+ İstanbul** mağazasına gelen boya maliyeti" olacaktır.

AK ŞİRKETİ ÖRNEĞİ – Amaç Fonksiyonu (2)

Ankara mağazasına Kütahya yada Mersin’den boya gelebilir. Kütahya’dan gelen boya maliyeti ne olacaktır?

(M+T1)X1

Mersinden gelen boya maliyeti ne olacaktır?

(C+S1)X4

Dolayısıyla <u>Ankara mağazasına gelen toplam maliyet</u>;

(M+T1)X1+(C+S1)X4

olur.

AK ŞİRKETİ ÖRNEĞİ –Amaç Fonksiyonu (3)

Diğer iller için de maliyetleri benzer şekilde belirleyebiliriz. Buna göre <u>Toplam Maliyetimiz</u> ise

(M+T1)X1+(M+T2)X2+ (M+T3)X3+ (C+S1)X4+(C+S2)X5+(C+S3)X6

Amacımız toplam maliyeti minimum yapmak olduğuna göre <u>amaç fonksiyonunu</u> şu şekilde yazabiliriz;

<u>Min</u> (M+T1)X1+(M+T2)X2+ (M+T3)X3+ (C+S1)X4+(C+S2)X5+(C+S3)X6

AK ŞİRKETİ ÖRNEĞİ - Kısıtlılıklar

Kısıtlıkları da matematiksel olarak ifade edersek;

1.Kütahya fabrikası kapasitesinin (K1) üzerinde üretim yapamamaktadır,

$$X1+X2+X3 \leq K1$$

2.Aracıdan satın alınabilecek boya miktarının üst sınırı (K2) bellidir,

$$X4+X5+X6 \leq K2$$

3.Bütün mağazaların siparişleri (R1,R2,R3) karşılanacaktır.

$$X1 + X4 = R1$$
$$X2 + X5 = R2$$
$$X3 + X6 = R3$$

4.Negatif Olamama Kısıtı

$$X1,\ X2,\ X3, X4, X5, X6 \geq 0$$

AK ŞİRKETİ ÖRNEĞİ- MODEL

Min $(M+T1)X1+(M+T2)X2+(M+T3)X3+$
$(C+S1)X4+(C+S2)X5+(C+S3)X6$

St.

$X1+X2+X3 \leq K1$

$X4+X5+X6 \leq K2$

$X1 + X4 = R1$

$X2 + X5 = R2$

$X3 + X6 = R3$

$X1, X2, X3, X4, X5, X6 \geq 0$