Doğrusal Programlamada Grafik Çözüm

Doğrusal Programlama Problemlerinin Formülasyonu: Mobilyacı Örneği

Sandalye ve koltuk üreten bir mobilyacı üretim için tahta ve boya kullanmaktadır. Bir sandalye üretimi için 3 m^3 tahta ve 1 kg boya kullanılırken, 1 koltuk için ise 4 m^3 tahta ve ½ kg boya gerekmektedir.

Çeşitli nedenlerden dolayı mobilyacının sağlayabildiği tahta miktarı günlük 92 m3 ve boya miktarı da 20 kg ile sınırlıdır.

Ürettiği sandalyelerin her biri mobilyacıya 275 TL, koltuklar ise 300 TL kar bırakmaktadır.

Bu bilgiler ışığında mobilyacının amacı mümkün olan en yüksek karı sağlayacak üretim bileşimini seçmektir.

DP modelini kurup grafik yöntemle çözümleyiniz.

Mobilyacı Örneği

		TAHTA (m^3)	BOYA (kg)	Br.KAR (TL)
SANDALYE	(X_1)	3	1	275
KOLTUK	(X_2)	4	1/2	300
		92	20	

Mobilyacı Örneği

1. KARAR DEĞİŞKENLERİ

Üretilecek Sandalye ve Koltuk Miktarları

Sandalye Miktarı : X_1

Koltuk Miktarı : X_2

2. AMAÇ FONKSİYONU

"En Yüksek Karı Elde Etmek" (Sandalye ve Koltuktan Elde Edilecek Kar Toplamını Maksimize Etmek")

Sandalyeden Elde Edilecek Kar;

Sandalye sayısı * Birim Kar = X_1*275

Koltuktan Elde Edilecek Kar;

Koltuk Sayısı * Birim Kar = X_2*300

Toplam Kar = Sandalye Karı + Koltuk Karı

$$= 275X_1 + 300X_2$$

Mobilyacı Örneği

3. KISITLAR

Boya Kısıtı;

<Sandalye ve Koltuk İçin Gerekli Boya Miktarı> <İlişki> <Toplam Boya miktarı>

$$1X_1 + 1/2X_2 \leq 20$$

Tahta Kısıtı;

<Sandalye ve Koltuk için Gerekli Tahta Miktarı> <İlişki> <Toplam Tahta miktarı>

$$3X_1 + 4X_2 \leq 92$$

MODEL

$Z_{MAX} = 275X_1 + 300X_2$

ST.

$1X_1 + 1/2X_2 \leq 20$

$3X_1 + 4X_2 \leq 92$

$X_1 \geq 0$

$X_2 \geq 0$

Alternatif Üretim planları:

	Şu Anki Üretim Planı (X1=X2=12)			***A Üretim Planı*** (X1=13, X2=12)			***B Üretim Planı*** (X1=15, X2=12)		
Amaç Fonksiyonu $275X1 + 300X2$	$275 (12) + 300 (12) = 6900$			$275 (13) + 300 (12) = 7175$			$275 (15) + 300 (12) = 7775$		
I nolu kısıt: $1X1 + 1/2X2 \leq 20$	18	≤	20 ✓	19	≤	20 ✓	21	≤	20 ☒
II nolu kısıt: $3X1 + 4X2 \leq 92$	84	≤	92 ✓	87	≤	92 ✓	93	≤	92 ☒

- Mevcut üretim planı yerine A planı uygulandığında amaç fonksiyonu değeri artıyor. Demek ki mevcut plan optimal değil!
- B planına geçilirse kısıtlar ihlal ediliyor (Uygun çözüm değil!)
- Öyle bir “C” planı olmalı ki kısıtlar ihlal edilmeden amaç fonksiyonunun değeri en yüksek olsun. (Uygun ve optimal çözüm)

O halde mevcut üretim planı değiştirilerek bu çözüm aranmalı!

DP Modelinin Çözülmesi: Optimal Çözümün Aranması

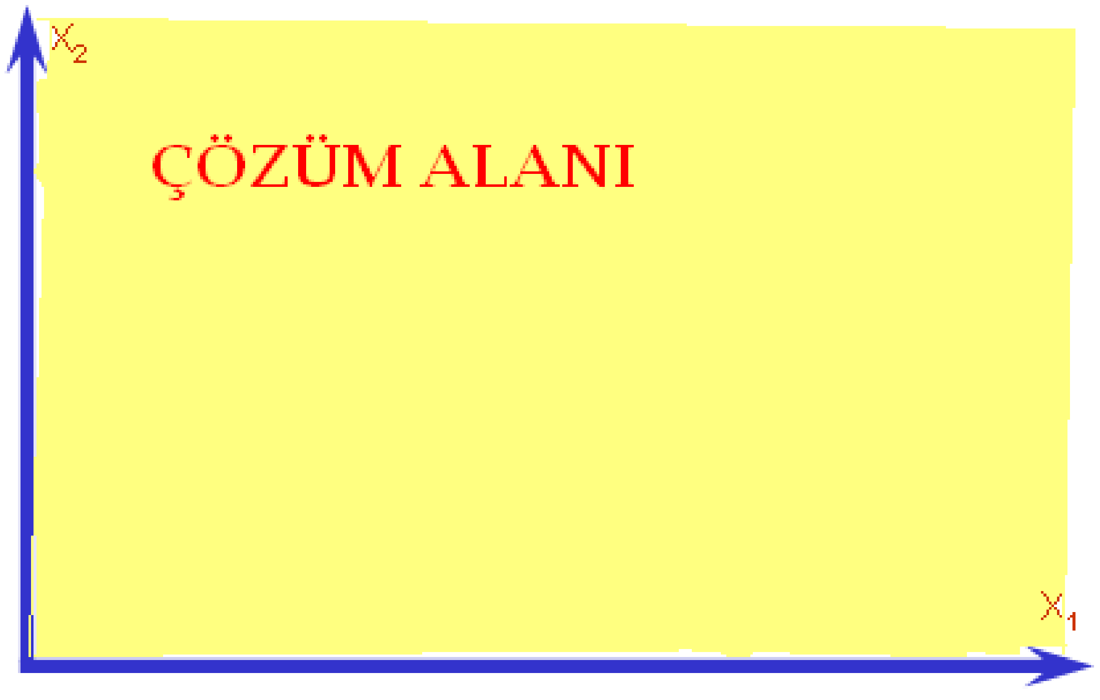
- Doğrusal Programlama modellerinin çözümlenmesinde temel olarak “Grafik Yöntemi” ya da “Simpleks Yöntemi (Algoritması)” adı verilen yöntemler kullanılır.

- Grafik Yöntem, DP modelini oluşturan kısıt fonksiyonlarının grafik üzerinde belirtilip, olası üretim noktaların koordinatlarının analitik olarak hesaplanmasına ve analizine dayanır.

GRAFİK ÇÖZÜM

1.AŞAMA

Negatif Olmama Kısıtlarının Sağlanması



GRAFİK ÇÖZÜM

Boya Kısıtının Çizilmesi

$1X_1 + 1/2X_2 \leq 20$

Varsayım 1: Tüm Boya Kullanılsın (eşitlik varsayalım);

- Sadece sandalye üretirsek (koltuk üretmezsek) 20 sandalye üretebiliriz
- Sadece koltuk üretirsek, 40 koltuk üretebiliriz

$X_2 = 0 \rightarrow X_1 = 20$

$X_2 = 2 \rightarrow X_1 = 19$

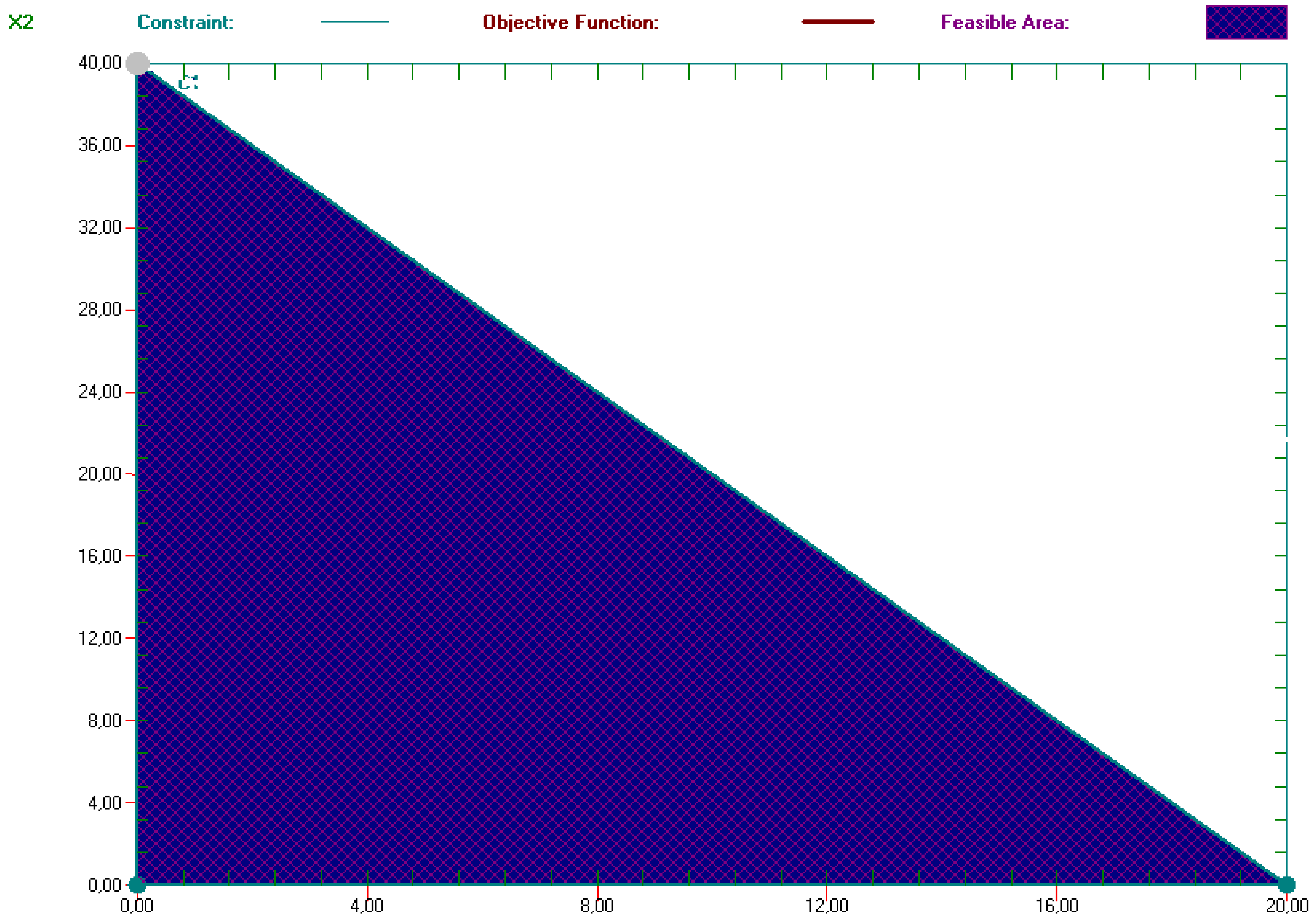
$X_2 = 4 \rightarrow X_1 = 18$

.

.

.

$X_2 = 40 \rightarrow X_1 = 0$


X2
Constraint:
Objective Function:
Feasible Area:
C1
40,00
36,00
32,00
28,00
24,00
20,00
16,00
12,00
8,00
4,00
0,00
0,00
4,00
8,00
12,00
16,00
20,00

Tahta Kısıtının Çizilmesi

$$3X_1 + 4X_2 \leq 92$$

Varsayım 2: Tüm Tahta Kullanılsın (eşitlik varsayalım);

- Sadece sandalye üretirsek (koltuk üretmezsek), 30,67 sandalye üretebiliriz
- Sadece koltuk üretirsek, 23 koltuk üretebiliriz

$X_2 = 23 \rightarrow X_1 = 0$

$X_2 = 22 \rightarrow X_1 = 4/3$

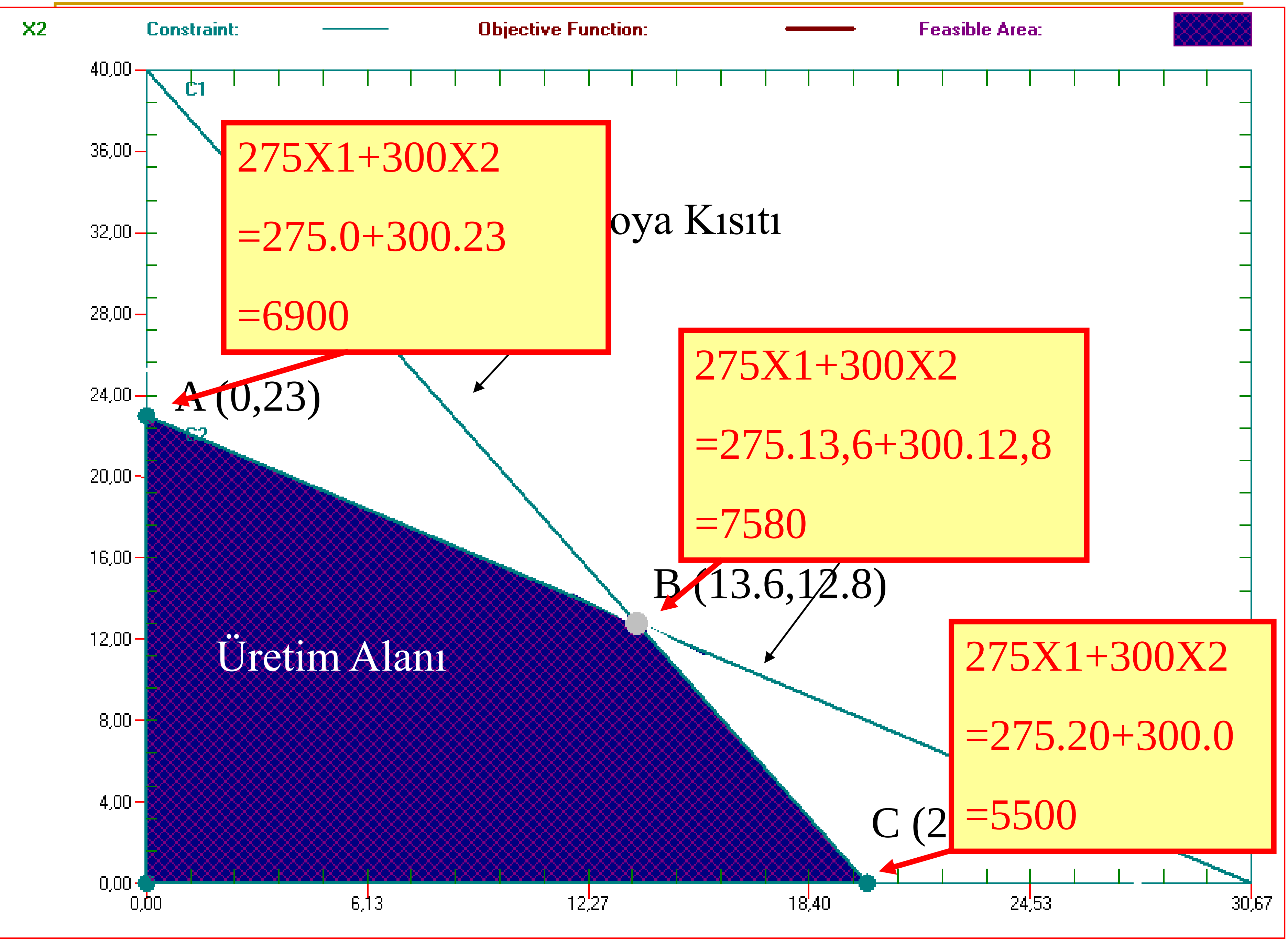
$X_2 = 21 \rightarrow X_1 = 8/3$

.

.

.

$X_2 = 0 \rightarrow X_1 = 30,67$



X2
Constraint:
Objective Function:
Feasible Area:
C1
C2
275X1+300X2
=275.0+300.23
=6900
oya Kısıtı
A (0,23)
275X1+300X2
=275.13,6+300.12,8
=7580
B (13.6,12.8)
Üretim Alanı
275X1+300X2
=275.20+300.0
=5500
C (2
40,00
36,00
32,00
28,00
24,00
20,00
16,00
12,00
8,00
4,00
0,00
0,00
6,13
12,27
18,40
24,53
30,67

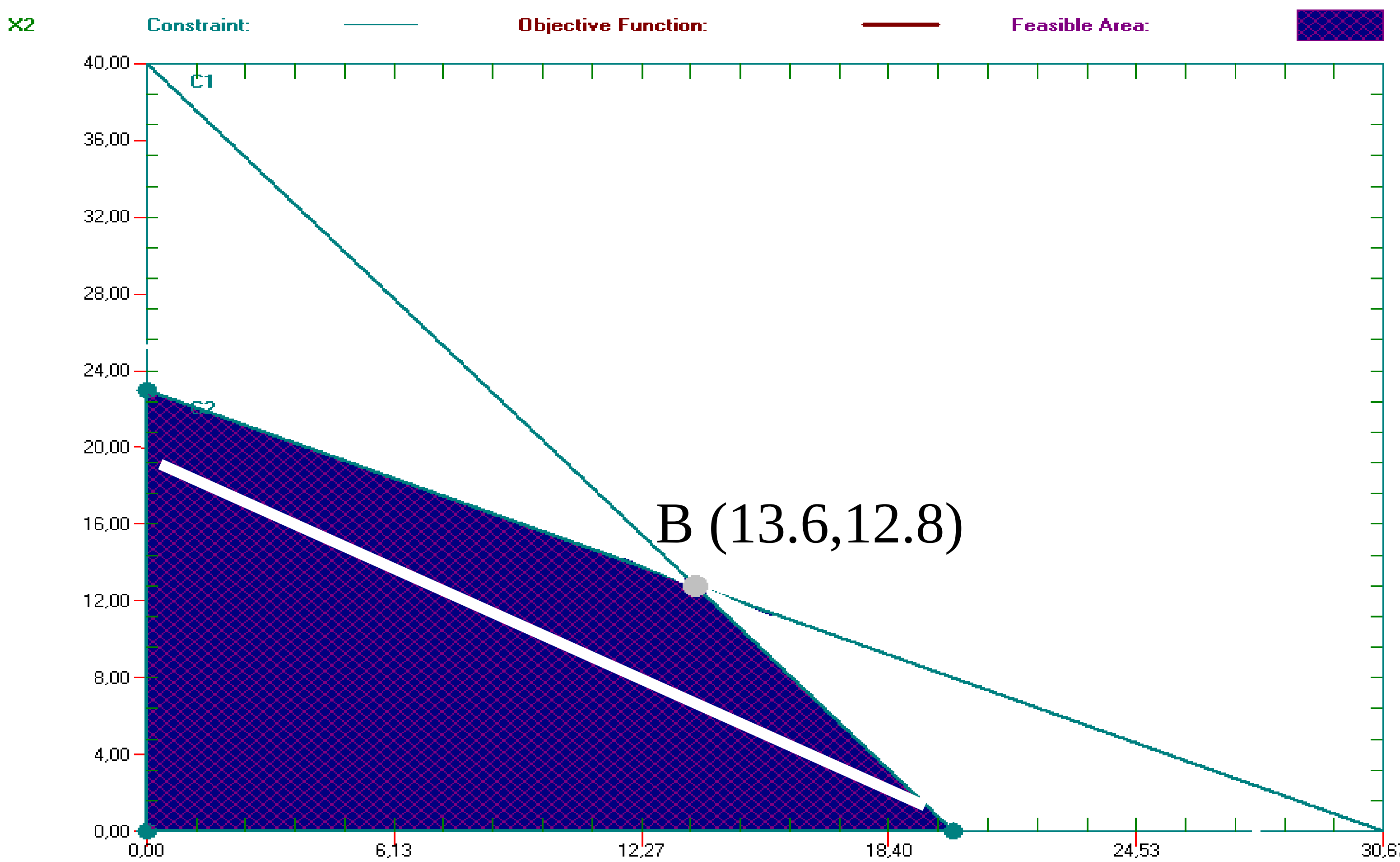
Optimal Çözüm

- Yukarıdaki grafikteki A, B ve C uç noktalarından biri karı maksimum yapan noktadır. Çünkü, orijinden kuzeybatı yönünde uzaklaştıkça üretim miktarı (X1: Sandalye, X2: Koltuk) artmaktadır. Bu değişkenler de amaç fonksiyonu ile doğru orantılı ilişkide olduklarından kar artacaktır.
- X1 ve X2'nin kara oransal katkıları farklı olduğundan A, B ve C noktalarından "biri" karı maksimum yapan noktadır. Acaba "hangisi"?
- Bu sorunun cevabını veren iki yaklaşımdan biri "deneme – yanılma yaklaşımı"dır ve yukarıda verilen örnek bunu açıklamaktadır.
- Diğer yaklaşım ise "kayıtsızlık eğrileri yaklaşımı" adını alır, bu yaklaşım ise grafik üzerinde şu şekilde gösterilebilir: →

Kayıtsızlık Eğrileri Yaklaşımı

Amaç fonksiyonuna rasgele bir değer atanır:

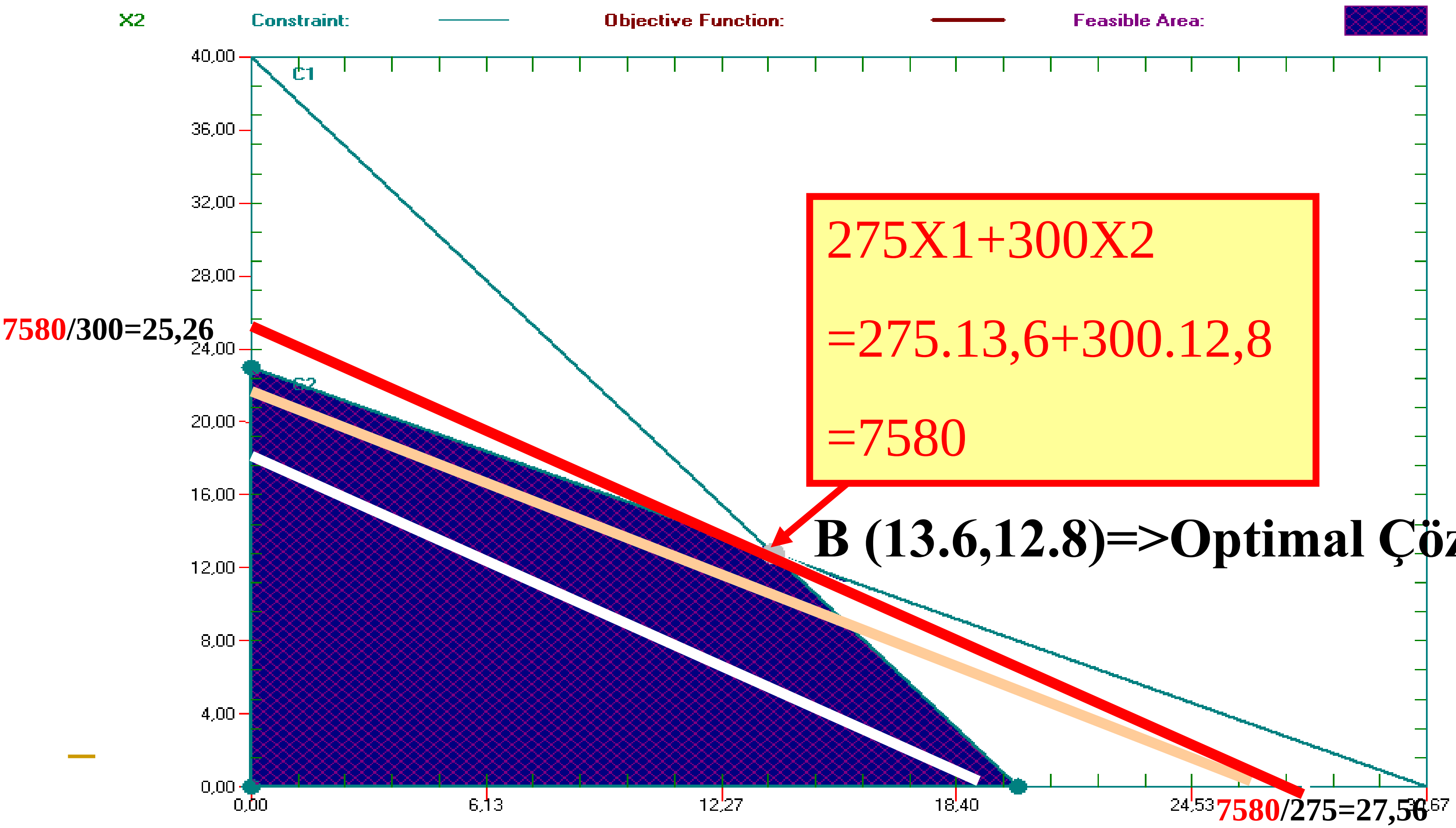
$Z_{max} = 275X_1+300X_2 = 5000$. Bu denkleme ait doğru grafiğe eklenir:



Kayıtsızlık Eğrileri Yaklaşımı

Amaç fonksiyonuna rasgele bir değer atanır:

$Z_{max} = 275X_1+300X_2 = 7000$. Bu denkleme ait doğru grafiğe eklenir:



Grafik Çözüm Yöntemi: "Kayıtsızlık Eğrileri Yaklaşımı"nı Özetlersek

- Kısıtları Grafik Üzerinde Göster
  - Olanaklı Alanların Kesişimini Belirle
  - Bu Kesişim Alanına ÇÖZÜM ALANI denir
- Amaç Fonksiyonuna Herhangi Bir Değer Ver
- Amaç Fonksiyonunu Çözüm Alanının En Son Noktasına Değecek Şekilde İlerlet
- Optimal Çözüm İçin İki Değişkenli İki Denklemi Beraber Çöz
- Elde Edilen Değerleri Amaç Fonksiyonundaki Yerine Koy