Grafikle Optimal Çözümün Duyarlılık Analizi

OPTİMAL ÇÖZÜMÜN DUYARLILIK ANALİZİ

- Modellerde kullanılan parametre değerleri sadece en iyi tahminlerdir.
- Bir optimal çözümün geçerliliği bu değerlere bağlıdır.
- Dinamik çevre bu parametrelerde dolayısıyla optimal çözümde değişimlere neden olabilir.

- Bu durumda **Optimal çözüm girdilerdeki (parametreler) değişmelere ne kadar duyarlıdır?** sorusu gündeme gelecektir.
- Zira yönetici*, parametreler değişirse modelin nasıl davranacağını* bilmek ister. Eğer parametrelerdeki değişimlere karşın optimal çözüm fazla değişmiyorsa yönetim daha rahat olacaktır.

Bunun için parametreler üzerinde “duyarlılık analizi” yapılır. Bu ise,

“Eğer...olursa..ne olur?” analizlerinin temelini oluşturarak; ekonomik yoruma olanak verir ve karara işlevsel katkı sağlar.

Duyarlılık Analizinin Cevap Aradığı Sorular: Örnekler

- Diyelim ki bir işletme iki tip ürün üretiyor. Bunların karları da 50 ve 60 TL /birim olsun.
- Bir DP modeli kurulup optimal üretim planı bulunmuş olsun:

  İlk üründen haftalık 100 ikinci üründen haftalık 150 adet üretilmesi gerek..
- Birinci ürünün birim karı piyasadaki talebin artışı ile 55 TL ye çıkarsa üretim kombinasyonları ne olur?

  - Aynı üründen hala aynı miktarda üretilmesi optimal olabilir.

  - Daha fazla üretilmesi optimal olabilir.
- Peki ya kar 60 TL'ye çıkarsa, 70 TL'ye çıkarsa?
- Elbette bir noktadan sonra o ürünün üretimi (kaynaklar diğerinin üretiminden aktarılarak) daha karlı olacaktır. Peki ama bu nokta nedir?
- Ya kaynaklar artarsa…? Örneğin ürünlerin üretiminde kullanılan işgücü yeni işe alımlarla artarsa ne olur?

Optimal Çözümün Duyarlılık Analizi

Bir Doğrusal Programlama Modelinde Parametreler iki yerde Karşımıza çıkar.

1. Amaç Fonksiyonunda
2. Kısıtlılıklarda

Bu nedenle Duyarlılık analizi "amaç fonksiyonu katsayıları" ve kısıtlılıkların "sağ taraf değerleri" konu olacak şekilde iki şekilde gerçekleştirilir.

Amaç Fonksiyonu Katsayılarının Duyarlılık Analizi

- Optimallik Alanı
  - Optimal Çözüm Şu Koşullar Sağlandığı Sürece Değişmeyecektir
    - Bir Amaç Fonksiyonu Katsayısı Optimallik Alanı İçinde yer Aldığı Sürece
    - Ve Diğer Girdilerde Bir Değişme Olmadığı Sürece
  - Ancak Amaç Fonksiyonunun Değeri Değişecektir

Amaç Fonksiyonu Katsayılarının Duyarlılık Analizi

$Z_{MAX} = 275X_1 + 300X_2$

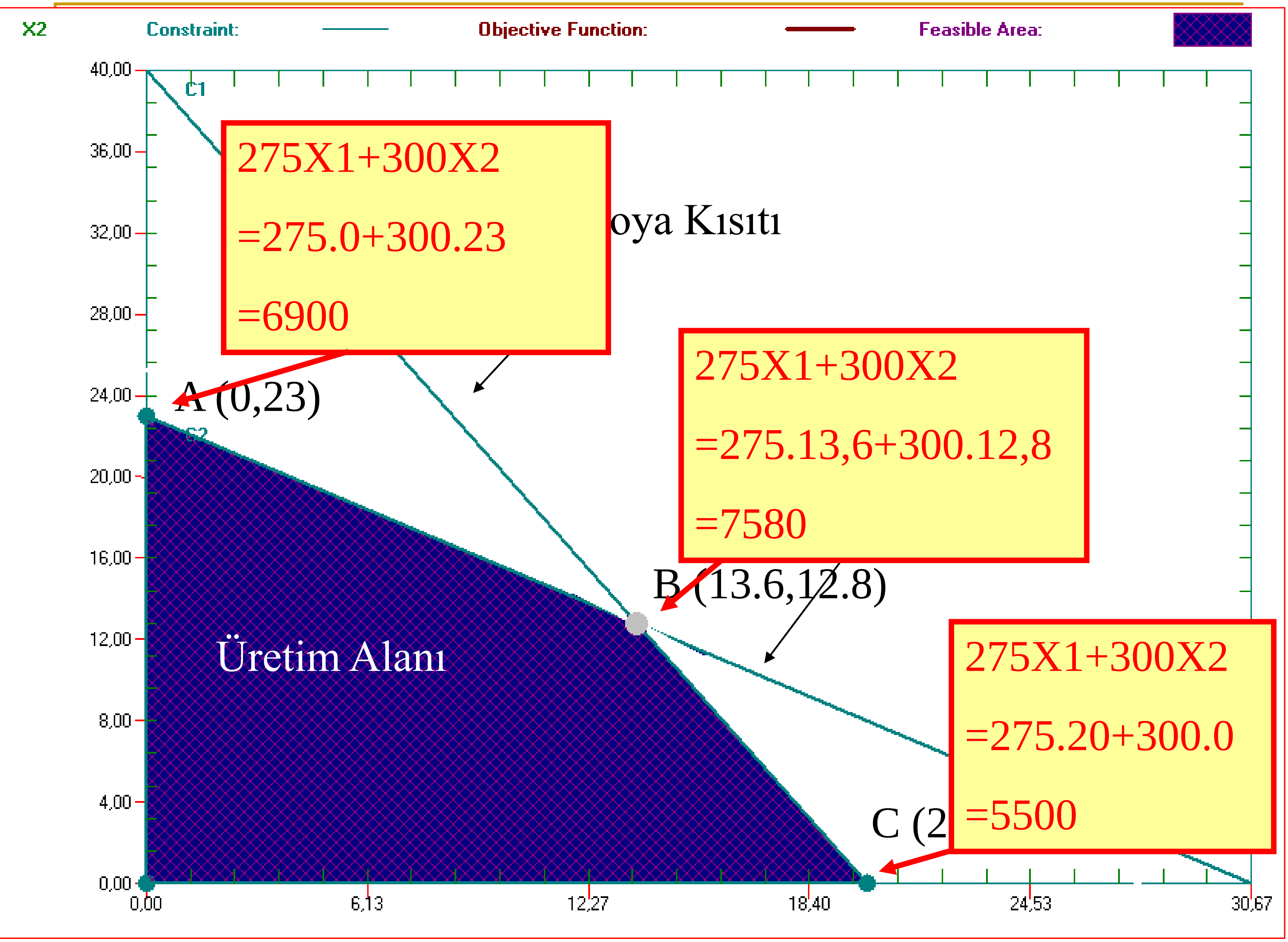
ST.

$1X_1 + 1/2X_2 \leq 20$

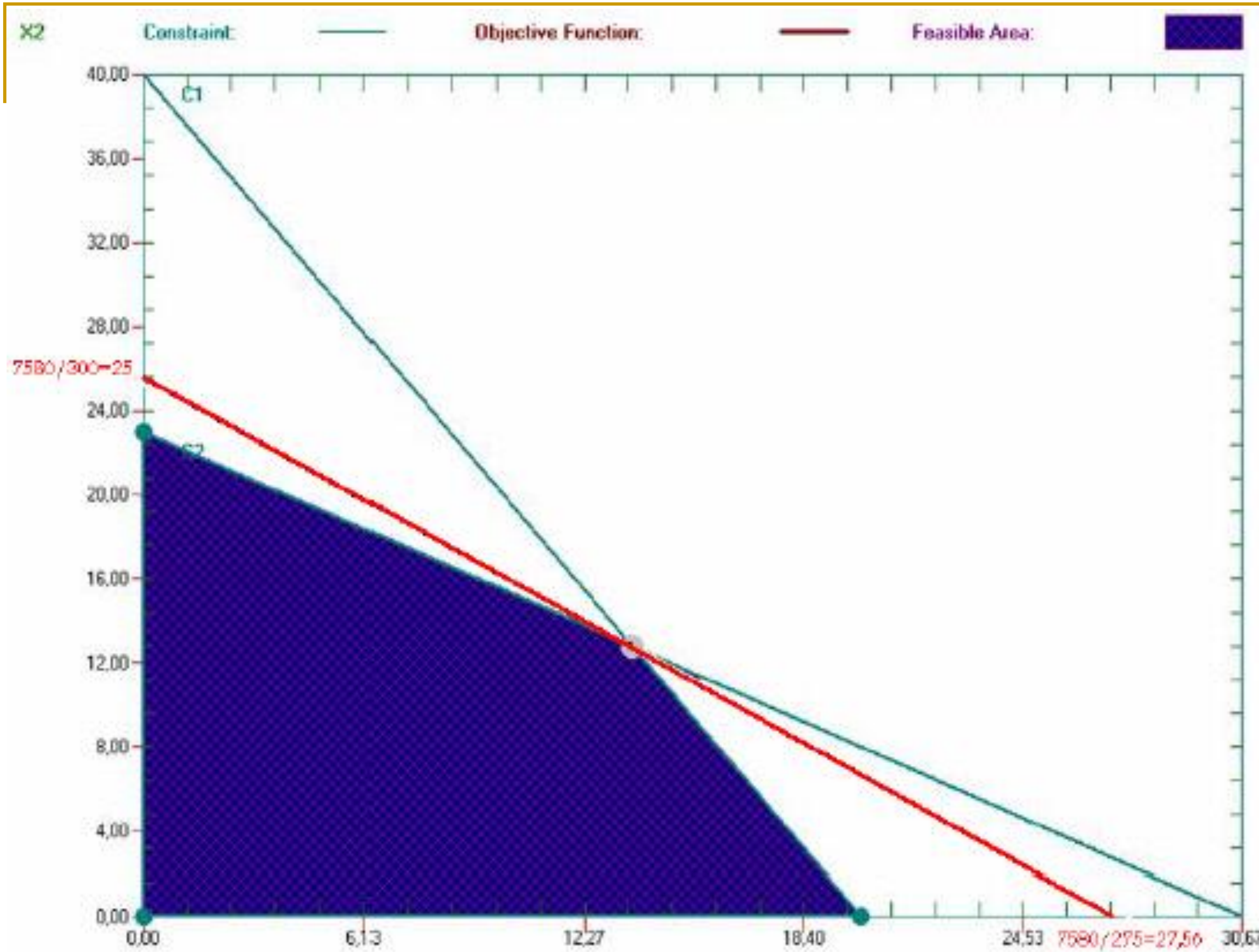
$3X_1 + 4X_2 \leq 92$

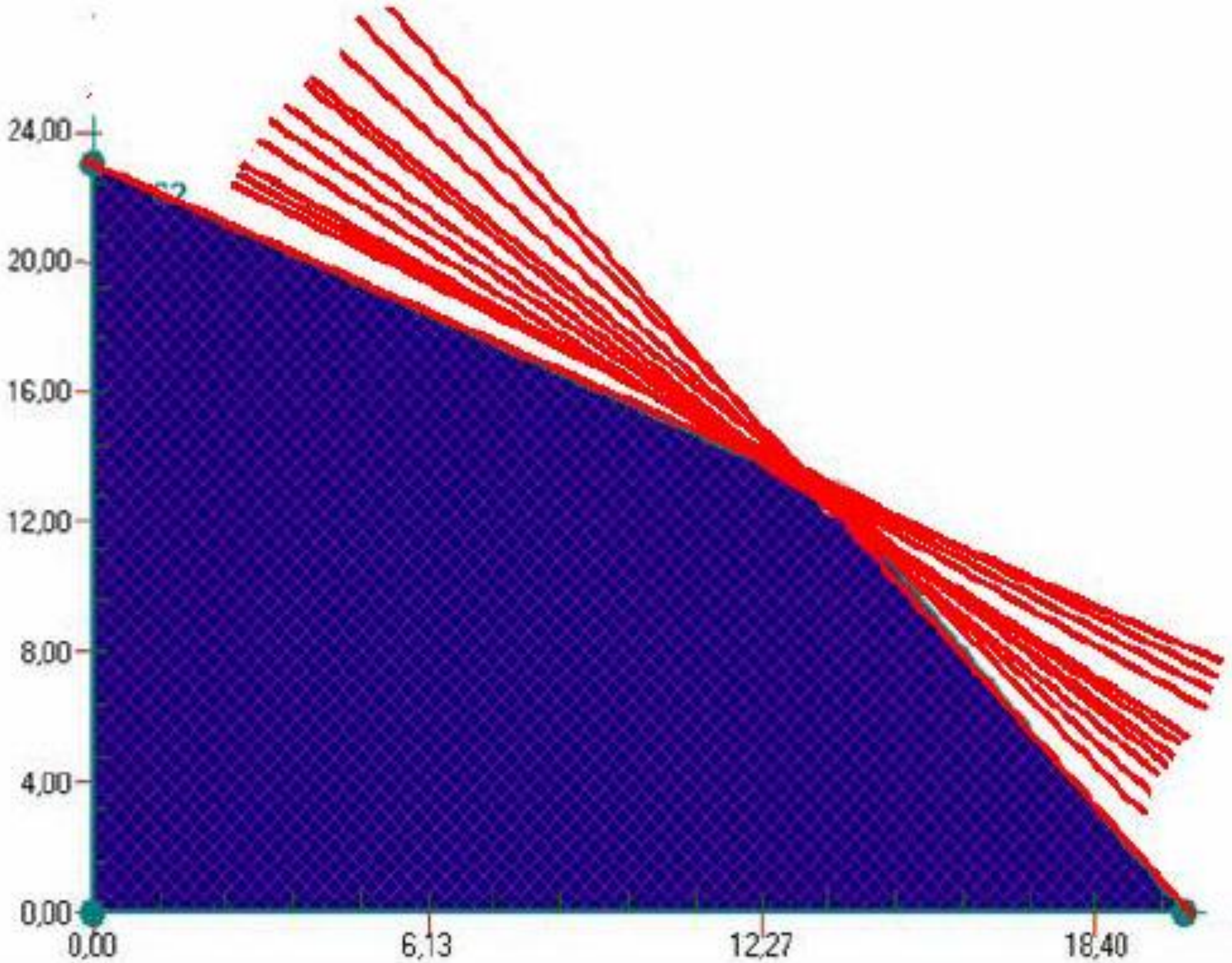
$X_1 \geq 0$

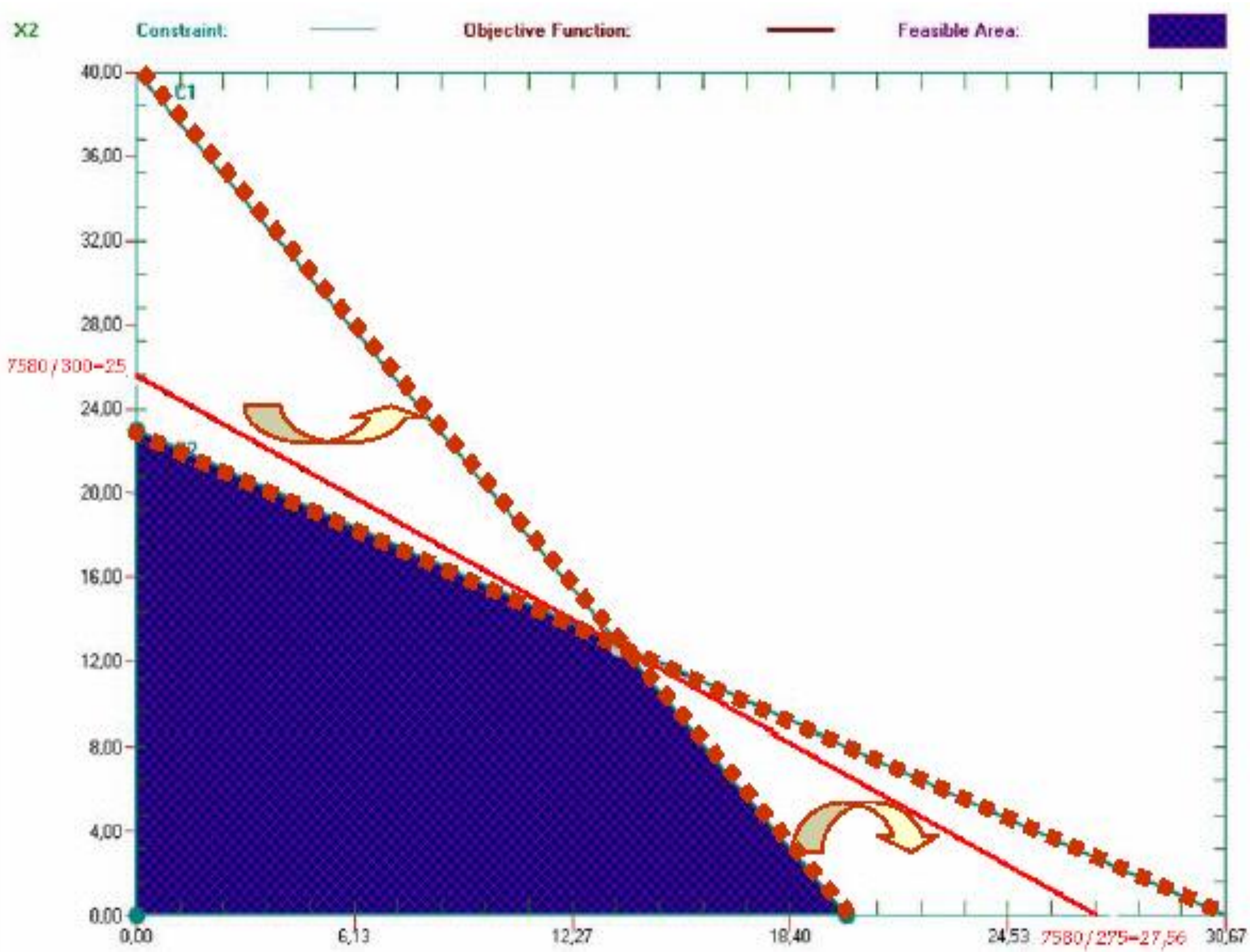
$X_2 \geq 0$



X2
Constraint:
Objective Function:
Feasible Area:
40,00
36,00
32,00
28,00
24,00
20,00
16,00
12,00
8,00
4,00
0,00
0,00
6,13
12,27
18,40
24,53
30,67
C1
C2
275X1+300X2
=275.0+300.23
=6900
oya Kısıtı
A (0,23)
275X1+300X2
=275.13,6+300.12,8
=7580
B (13.6,12.8)
Üretim Alanı
275X1+300X2
=275.20+300.0
=5500
C (2


X2
Constraint:
Objective Function:
Feasible Area:
40,00
36,00
32,00
28,00
24,00
20,00
16,00
12,00
8,00
4,00
0,00
C1
C2
7580/300=25
0,00
6,13
12,27
18,40
24,53
7580/275=27,56
30,67


24,00
20,00
16,00
12,00
8,00
4,00
0,00
0,00
6,13
12,27
18,40



X2
Constraint:
Objective Function:
Feasible Area:
40,00
36,00
32,00
28,00
24,00
20,00
16,00
12,00
8,00
4,00
0,00
C1
7580/300=25
0,00
6,13
12,27
18,40
24,53
7580/275=27,56
30,67

Duyarlılık Analizi: Cebirsel Olarak

- Amaç fonksiyonunun katsayıları (dolayısıyla eğimi), bağlayıcı kısıtlardan birinin eğimine eşit olana dek değiştirilebilir. Bu noktadan sonra optimal çözüm değişir.

- O halde öncelikle kısıtların eğimlerini ayrı ayrı hesaplarız.

Kısıt 1: Boya Kısıtı

$1X1 + \frac{1}{2} X2 = 20$

Bu doğrunun eğimi: $-1/(\frac{1}{2}) = -2$

Kısıt 2: Tahta Kısıtı

$3X1 + 4X2 = 92$

Bu doğrunun eğimi: $-\frac{3}{4} = -0.75$

Duyarlılık Analizi: Cebirsel Olarak

- Amaç fonksiyonunun eğimini de hesaplayalım:

Amaç fonksiyonunun eğimi

Amaç Fonksiyonu:

$$C_1 .\ X1 + C_2\ X2$$

$$= 275X1 + 300X2$$

Bu doğrunun eğimi:

$$C_1 / C_2 = -\ 275 / 300$$

Amaç fonksiyonunun eğiminin optimal çözümü değiştirmeyecek hareket alanı

- Amaç fonksiyonunun eğimi bağlayıcı kısıtların eğimleri arasında kaldıkça optimal çözüm değişmeyecektir. (- ler düzenlenirse)

$$Eğim_{Bağlayıcı\ Kısıt1} \leq Eğim_{Amaç\ Fonksiyonu} \leq Eğim_{Bağlayıcı\ Kısıt2}$$

$$0{,}75 \leq \Delta\ (C_1 / C_2) \leq 2$$

$$0{,}75 \leq \Delta\ (275/300) \leq 2$$

Optimal Çözüm kombinasyonunun değişmeyeceği alan böylece bulunacaktır ➔

C_1 katsayısı için analiz: $0{,}75 \leq C_1 / C_2 \leq 2$ bulunmuştu...

BUNA GÖRE,

- *X2 nin amaç fonksiyonuna katkısında (C_2 = 300) bir değişme olmadığı durumda*;

  $0{,}75 \leq C_1/300 \leq 2$

  $\Rightarrow 0{,}75\ (300) \leq C_1 \leq 2\ (300)$

  $\Rightarrow 225 \leq C_1 \leq 600$

  ŞARTI SAĞLANDIKÇA OPTİMAL ÇÖZÜM (X1 = 13,6; X2 = 12,8) DEĞİŞMEZ.

- Ancak AMAÇ FONKSİYONUNUN DEĞERİ DEĞİŞİR. Örneğin, C_1 500' e çıkarsa => 500 (13,6) + 300 (12,8) = 10640 Olur.

- Buradan hareketle optimal çözümün değişmemesi için C_1'de

  "kabul edilebilir artış"ın (allowable increase): 600-275 = 325,

  "kabul edilebilir azalış"ın (allowable decrease): 275- 225 = 50

  olduğu söylenir.

C_2 katsayısı için analiz: $0,75 \leq C_1 / C_2 \leq 2$ bulunmuştu...

BUNA GÖRE,

- *X1 nin amaç fonksiyonuna katkısında (C_1 = 275) bir değişme olmadığı durumda*;

  $0,75 \leq 275 / C_2 \leq 2$

  => $0,75 / 275 \leq 1 / C_2 \leq 2 / 300$

  => $137,5 \leq C_2 \leq 366,67$

  ŞARTI SAĞLANDIKÇA OPTİMAL ÇÖZÜM (X1 = 13,6; X2 = 12,8) DEĞİŞMEZ.

- Ancak AMAÇ FONKSİYONUNUN DEĞERİ DEĞİŞİR. Örneğin, C_2 350'ye çıkarsa => 275 (13,6) + 350 (12,8) = 8820 Olur.

- Buradan hareketle optimal çözümün değişmemesi için C_2'de

  "kabul edilebilir artış"ın: 366,67-300 = 66,67,

  "kabul edilebilir azalış"ın: 300 – 137,5 = 163,5

  olduğu söylenir.

Kısıtların sağ taraf değerlerinin duyarlılık analizi

- Sağ taraf değerlerinin duyarlılık analizinde şu sorulara cevap ararız:

  - Diğer bütün faktörler sabitken, kısıtlılıklardan birinin sağ taraf değerinde bir birimlik değişme amaç fonksiyonunun optimal değerinde ne miktarda değişmeye neden olacaktır?

  - Amaç fonksiyonunda meydana gelen bu değişme kaç birimlik artış veya azalışa kadar yani hangi aralıkta geçerlidir?

GÖLGE FİYAT

Girdi parametrelerinde başka bir değişikliğin olmadığı varsayımı altında, bir kısıtlılığın sağ taraf değerinde meydana gelen bir birimlik artışın amaç fonksiyonunun optimal değerinde yarattığı değişime o kısıtlılığın gölge fiyatı adı verilir.

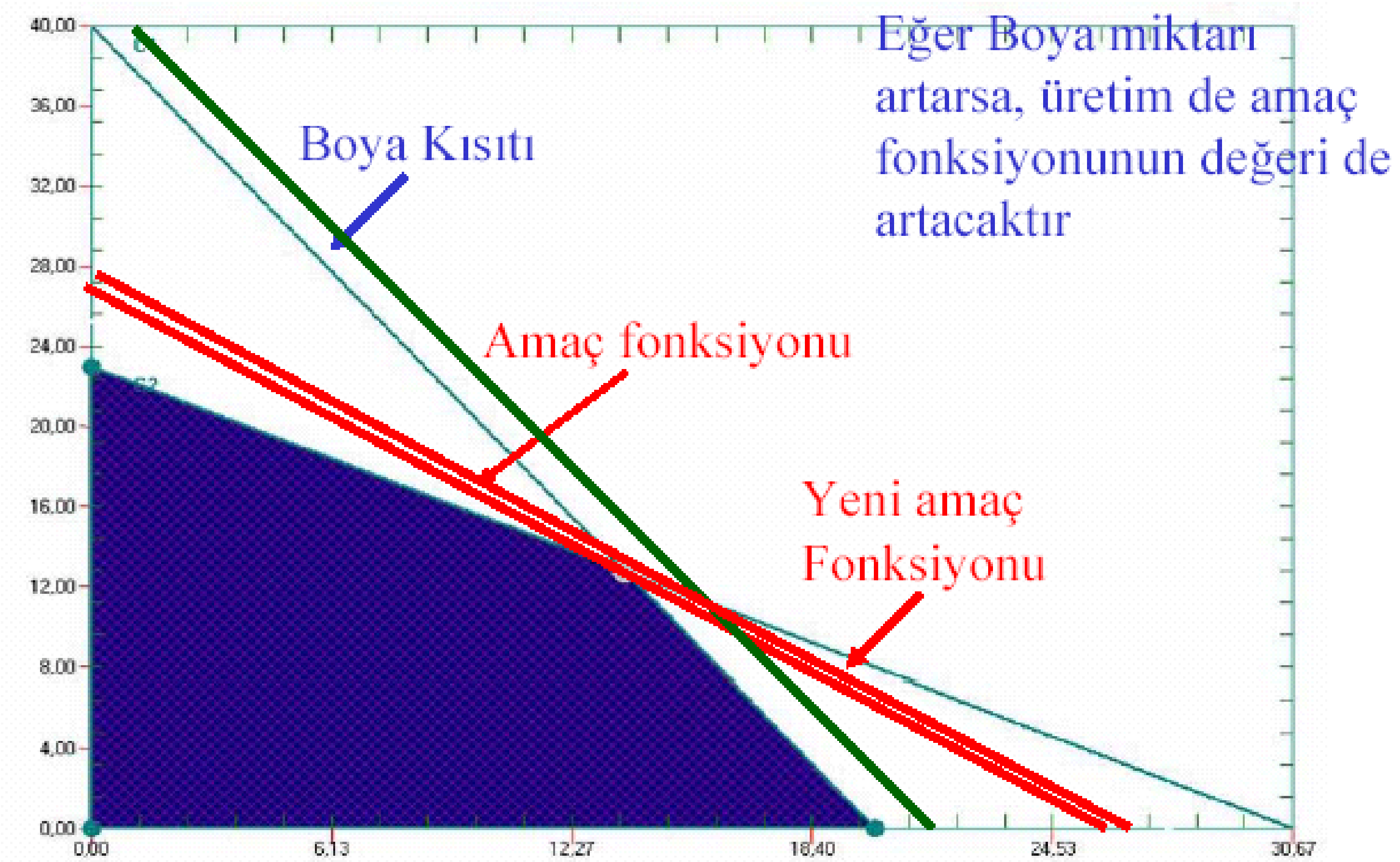
Gölge Fiyatın Özellikleri

Bir kısıtlılığın gölge fiyatı o kısıtın sağ taraf değerlerinin “kabul edilebilir artış” veya “kabul edilebilir azalış” sınırları içinde geçerlidir.

Bağlayıcı olmayan kısıtların gölge fiyatı sıfır dır. Zira bu kısıtlar için kullanılmayan (atıl) kaynak mevcuttur.

Gölge fiyat piyasa fiyatından farklı bir kavramdır ve o üretim mekanizması içinde hesaplanan bir fiyattır.

Sağ Taraf Değerlerinin Duyarlılık Analizi – Boya Kısıtı



Sağ Taraf Değerlerinin Duyarlılık Analizi – Boya Kısıtı

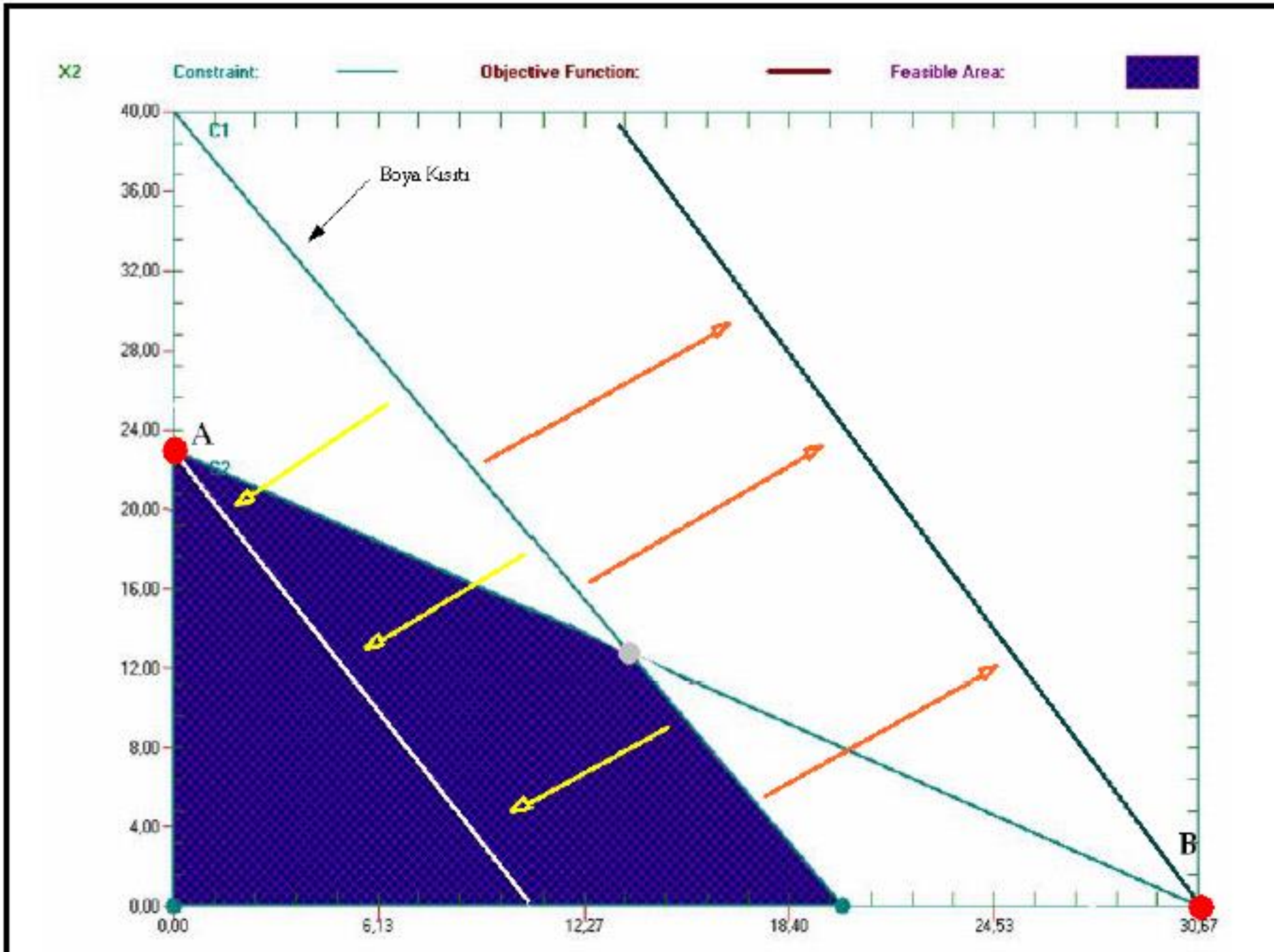
- Başlangıç Durumu (Boya miktarı 20 kg)

$X_1 = 13.6$ $X_2 = 12.8$ $Z_0 = 7580$

- Yeni Durum (Boya Miktarı 21 kg)

$X_1 = 15.2$ $X_2 = 11.6$ $Z_1 = 7660$

BOYA MİKTARINDA MEYDANA GELEN 1 BİRİMLİK ARTIŞ AMAÇ FONKSİYONU DEĞERİNİ 80 BİRİM ARTIRMIŞTIR. BOYA KISITININ GÖLGE FİYATI 80'DİR.



X2
Constraint:
Objective Function:
Feasible Area:
40,00
36,00
32,00
28,00
24,00
20,00
16,00
12,00
8,00
4,00
0,00
C1
Boya Kısıtı
A
C2
B
0,00
6,13
12,27
18,40
24,53
30,67

Sağ Taraf Değerlerinin Duyarlılık Analizi – Boya Kısıtı

- A (0,23) Noktası

X_1=0 X_2=23

Gereken Boya Miktarı : 1(0) + ½ (23) = 11,5

Z_A= 275 (0) + 300 (23) = 6900

- B (30.6,0) Noktası

X_1=30.6 X_2=0

Gereken Boya Miktarı : 1(30.67) + ½ (0) = 30.6

Z_B = 275 (30,67) + 300 (0) = 8434

Sağ Taraf Değerlerinin Duyarlılık Analizi – Boya Kısıtı

- Boya Miktarındaki Değişme :

30,67-11,5 = 19,17

- Optimal Çözüm Değerindeki Değişme:

8434-6900 = 1534

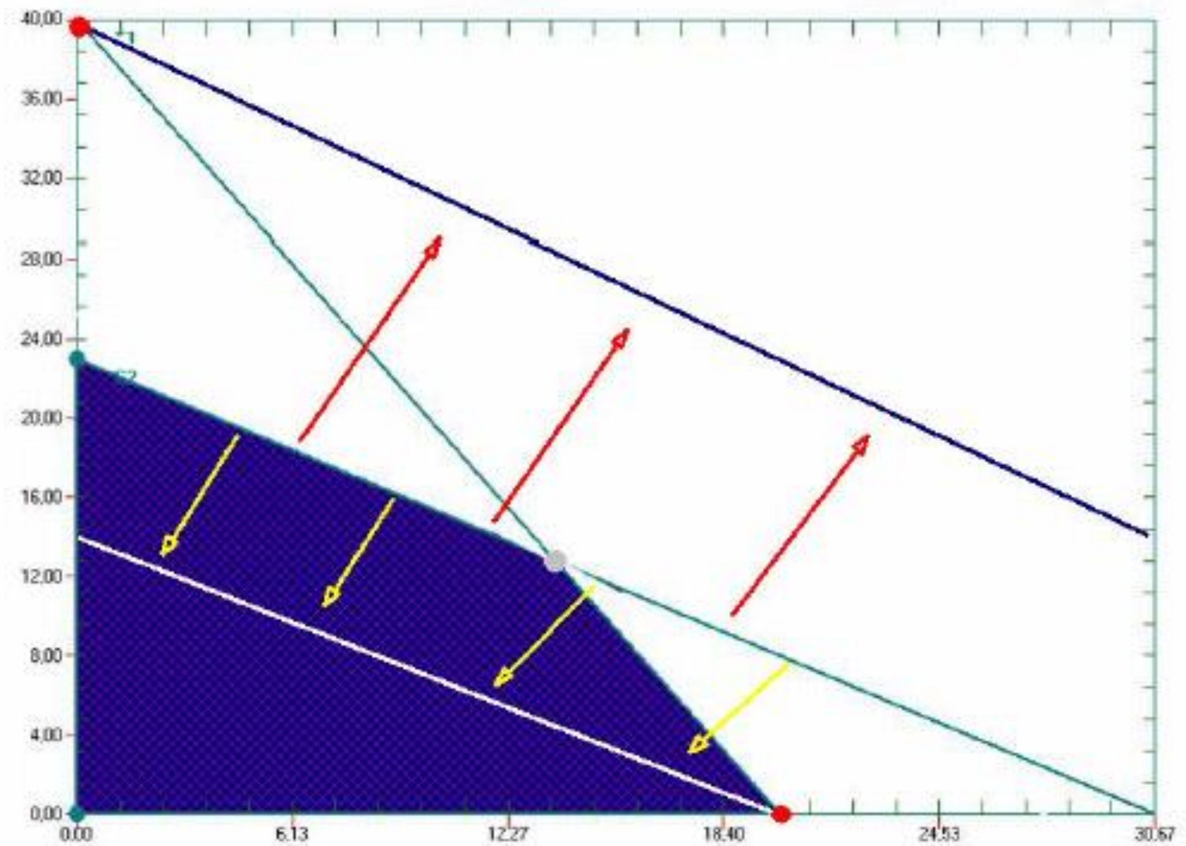
Boya Kısıtının Gölge Fiyatı:

1534/19,17 = 80

Gölge Fiyatın Geçerli Olduğu Alan;

30,67 – 11,5 Aralığı

Sağ Taraf Değerlerinin Duyarlılık Analizi – Tahta Kısıtı



Sağ Taraf Değerlerinin Duyarlılık Analizi – Tahta Kısıtı

- A (0,40) Noktası

$X_1=0$ $X_2=40$

Gereken Tahta Miktarı : $3(0) +4(40) =160$

$Z_A= 275\ (0) + 300(40) =12000$

- B (20,0) Noktası

$X_1=20$ $X_2=0$

Gereken Tahta Miktarı : $3(20)+4(0) =60$

$Z_B = 275\ (20)+300(0) = 5500$

Sağ Taraf Değerlerinin Duyarlılık Analizi – Tahta Kısıtı

- Tahta Miktarındaki Değişme :

160-60 = 100

- Optimal Çözüm Değerindeki Değişme:

12000-5500 = 6500

Boya Kısıtının Gölge Fiyatı:

6500/100 = 65

Gölge Fiyatın Geçerli Olduğu Alan;

160 – 60 Aralığı

Karar Değişkeni	Çözüm Değeri	Birim Kar	Toplam Katkı	İndirgenmiş Maliyet	İzin Verilen En düşük C_j	İzin Verilen En Yüksek C_j	
X_1	13.6	275	3740	0	225	600	
X_2	12.8	300	3840	0	137.5	366.67	
Amaç Fonksiyonu			7580				
Kısıtlık	Sol Taraf Değeri	Yön	Sağ Taraf Değeri	Fazlalık veya Boşluk	Gölge Fiyat	İzin Verilen Min STD	İzin Verilen Max STD
C_1 (BOYA)	20	$\leq$	20	0	80	11,5	30.67
C_2 (TAHTA)	92	$\leq$	92	0	65	60	160

Probleme yeni bir değişkenin eklenmesi

- Eğer **bu değişkenin tüketeceği kaynakların gölge fiyatları toplamı (bu değişkenin tükettiği kaynakların marjinal maliyeti), sağladığı marjinal katkıdan (Cj) fazla ise** bu değişken **çözüme girmez.** (Maksimizasyon durumunda böyle… – minimizasyonda tersi geçerli).

  ÖRN.

- Max $275X_1 + 300X_2$

  $X_1 + ½ X_2 \leq 20$ (Gölge fiyat: 80)

  $3X_1 + 4X_2 \leq 92$ (Gölge fiyat: 65)

- "Lüx koltuk üretimi": X_3 kar: 450, boya: 2, tahta: 5 ise

  450 – (2 (80) + 5 (65)) = 450 – 160 – 325 = -35

  Lüx koltuk üretilmez!

Probleme yeni bir kısıtın eklenmesi

- Verilen optimal çözüm değerleri bu kısıtlılıkta yerine konur ve bu değerlerin yeni kısıta uyup uymadığına bakılır.

  ÖRN.
- Optimal çözüm: $X_1 = 13.6$; $X_2 = 12.8$
- Yeni kısıtlılık: "Sünger": $2X_1 + 4X_2 \leq 60$

  ➔ $2(13.6) + 4\,(12.8) \leq 80$

  $27.2 + (51.2) = 78.4 \leq 80$

Bu kısıt probleme girmiştir. Problem yeniden çözülmelidir.