Tamsayılı Programlama

Tamsayılı Programlama - Giriş

- Doğrusal programlama (DP) modellerinin varsayımlarından birisi de bu değişkenlerin kesirli değerler alabilecekleri şeklindeydi (bölünebilirlik varsayımı)

- Ancak gerçek hayat problemlerinde değişkenlerin **tamsayılı değer alması (tamsayılı sonuç) kaçınılmaz olabilir** ➔

- Bu nedenle ve **diğer bazı gerekçelerle** Tamsayılı Doğrusal Programlama Modelleri'ne (TDP) gereksinim duyulur. ➔

Aşağıdaki türde problemler Tamsayılı (Doğrusal) Programlama (TDP) ile modellenir: Örnekler

- **8.72 personel** istihdam edilmesi, **3.5 banka** şubesinin kurulması bir anlam ifade etmez.

- Kesirli değerler alan bu sayıları bir **alt sayıya yuvarlamak da optimal çözüm olmayabilir ve hatta uygun çözüm bölgesinde yer almayabilir**. ➔

- Bazı **mantıksal ifadeleri içeren kısıtların** da modele dahil edilmesi gerekebilir:

  "Ankara'ya fabrika kurarsak Kayseri'ye kurmamalıyız"

  "1 nolu projeye yatırım yaparsak 2 nolu projeye yatırım yapamayız" gibi..

- İşletmecilikte bazı karar problemleri **"evet-hayır"**, **"0-1"**, **"doğru-yanlış"**, **"üret-üretme"** gibi önermeleri içeren **ikili değişken yapı**da olabilir.

TDP modelinin yazılışı

- TDP modelinin gösteriminin DP gösteriminden tek farkı, modelin sonuna tüm değişkenlerin tamsayı olacağına ilişkin ifadenin eklenmesidir:

- ÖRNEK:

$Z_{max} = 5X_1 + 4X_2$

s.t.

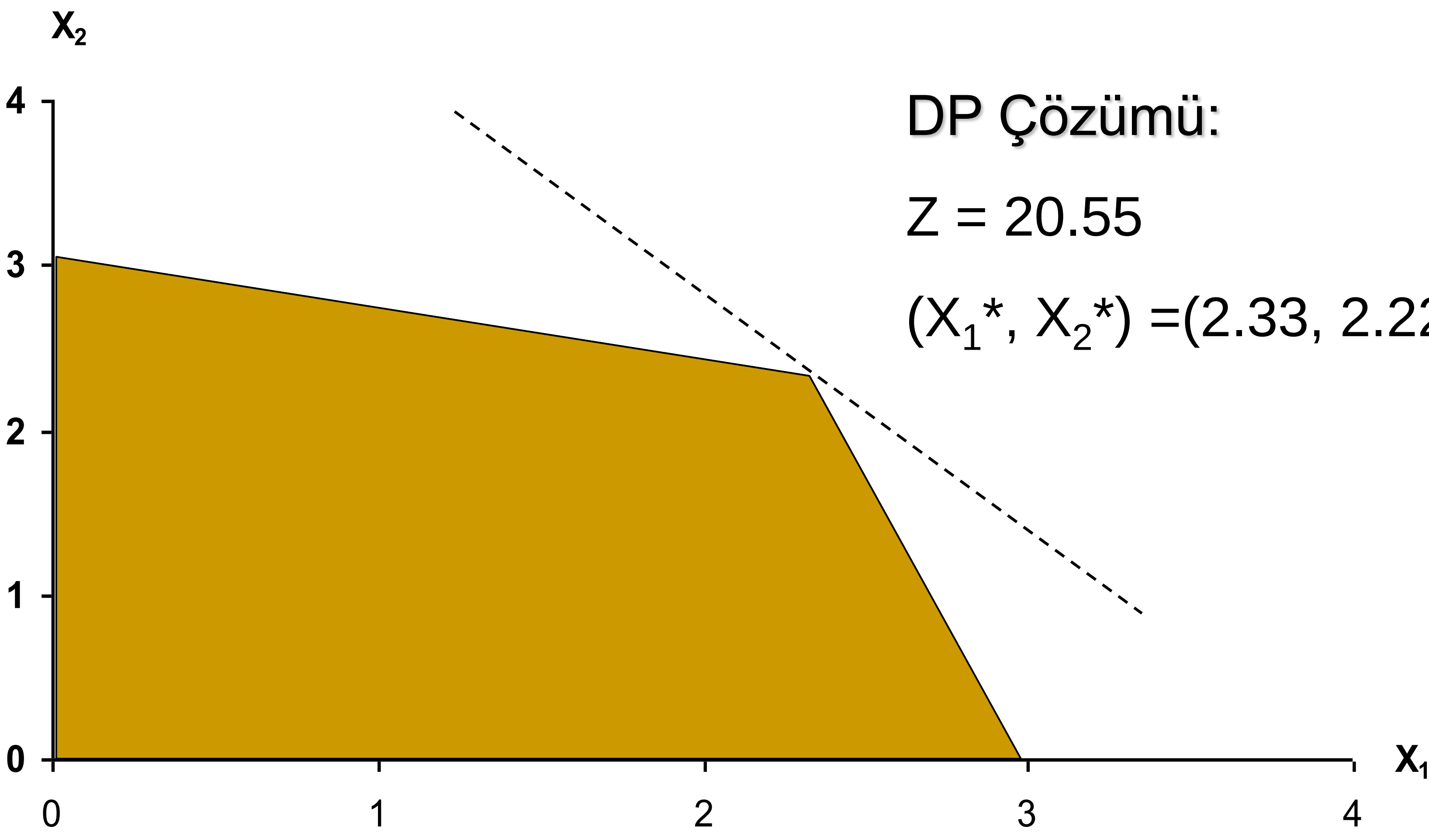
$10X_1 + 3X_2 \leq 30$

$X_1 + 3X_2 \leq 9$

$X_i \geq 0$

X_i Tamsayı

Grafik Üzerinde TDP-DP Farkı

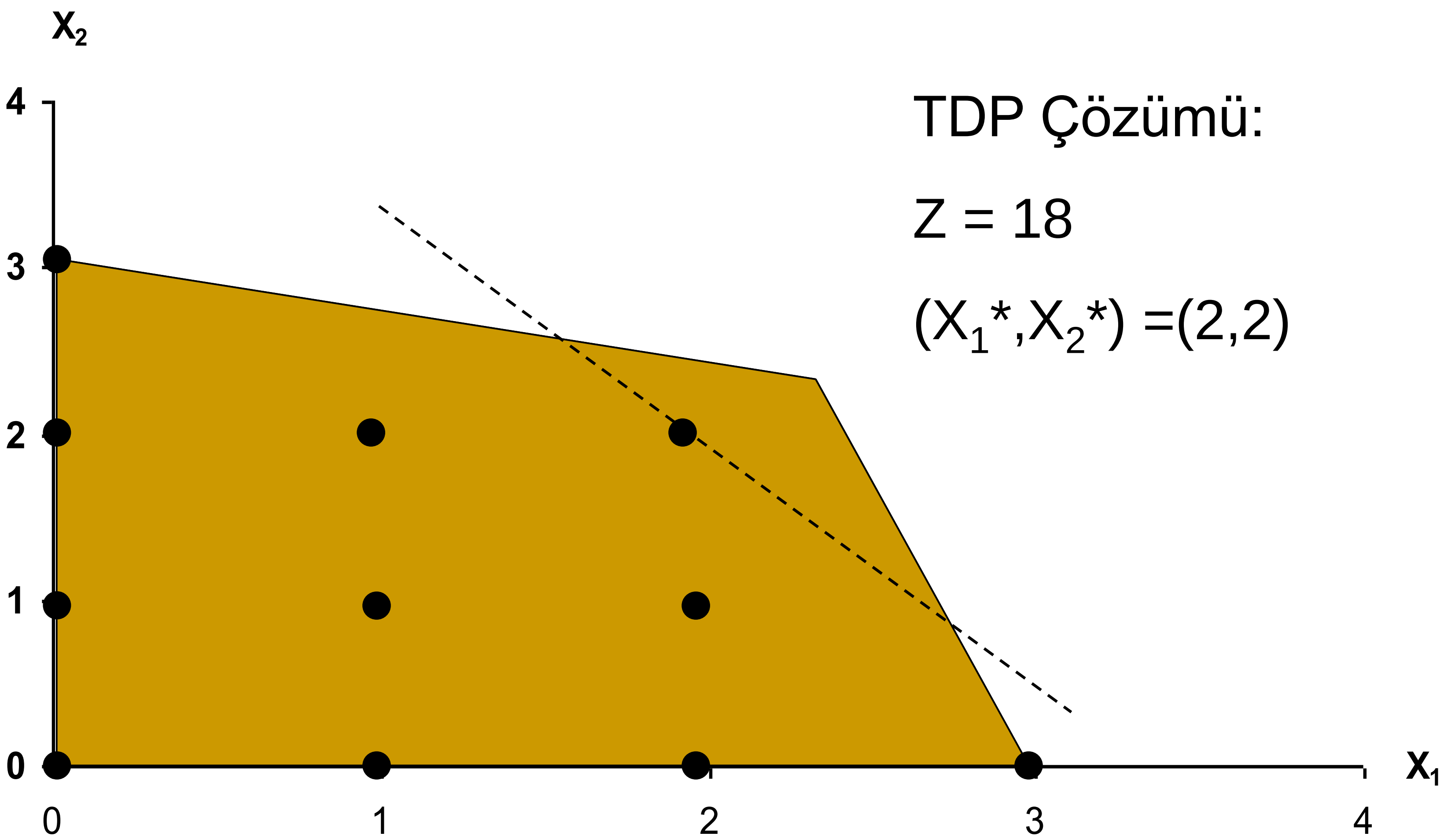


DP Çözümü:

Z = 20.55

$(X_1^*, X_2^*) = (2.33, 2.22)$

Grafik Üzerinde TDP-DP Farkı



TDP Çözümü:

Z = 18

$(X_1^*, X_2^*) = (2,2)$

TDP'de Çözüm

- Tam sayılı programlamada genelde **çözüm DP'den çok daha zordur**. M**odelin boyutu arttıkça çözüm de zorlaşmaktadır**.

Çünkü:

- **DP**'de, çözüm mutlaka **uç noktalardan** birisindedir ancak **TDP'de** böyle bir **şart bulunmaz**.

- **DP**'de kullanılan **"Simplex"** tabanlı çözüm algoritmaları uygun bölgedeki **uç noktaları deneyerek** sürekli amaç fonksiyonunu iyileştirecek şekilde ilerler ve **optimallik testi** ile bir noktada (Zopt) durur.

- Ancak, **Tam Sayılıda** çözüm uygun bölgedeki bazen **on binlerce tamsayı değerinden birisidir** ve DP'ye oranla olası çözüm noktası daha fazladır.

TDP’de Çözüm Teknikleri

- **Yuvarlama Yöntemi**: Akla gelen en kolay çözüm yolu **problemi DP ile çözüp, elde edilen değerleri en yakın (alt) tam sayıya yuvarlamaktır.**

- **DP Gevşetmesi**: Bir Tam Sayılı DP modelinden **tam sayı kısıtının kaldırılıp**, sorunu DP olarak modelleyerek çözüme gidilmesine **DP gevşetmesi** denilir. (Değişken kesirli değer alabilir.)

- **Dal/Sınır (Branch and Bound) Algoritması**: TDP çözümünde Dal/Sınır adı verilen bir algoritma kullanılabilir**.**

Ancak bunların hepsinin bir takım sakıncaları ve üstünlükleri vardır

..

Farklı Çözüm Tekniklerine Göre Elde Edilen Değerlerin Karşılaştırılması

Tamsayılı, Gevşetilmiş ve Yuvarlanmış çözüm değerleri birbirlerinden çok farklı olabilir.

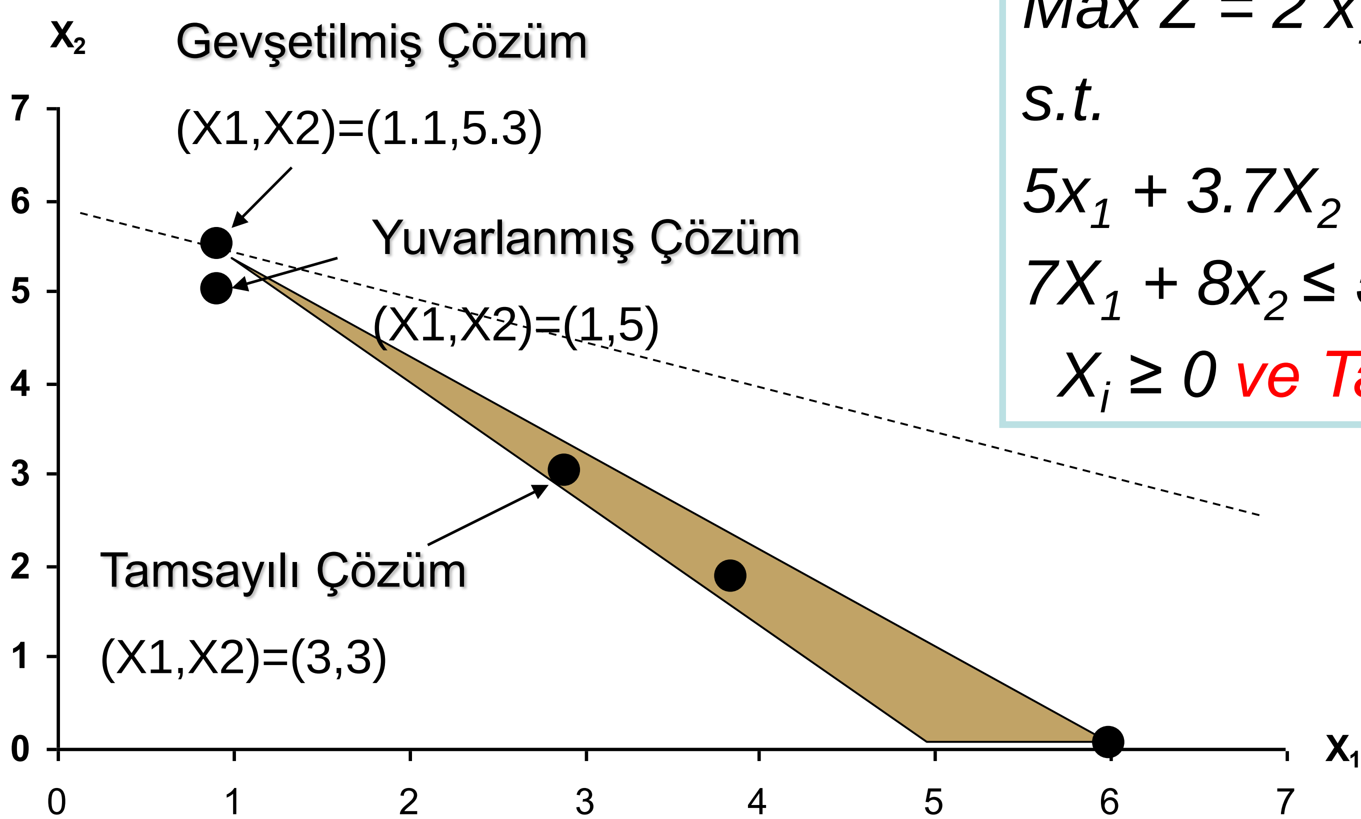
$Max\ Z = 2x_1 + 4x_2$

s.t.

$5x_1 + 3.7X_2 \geq 25$

$7X_1 + 8x_2 \leq 50$

$X_i \geq 0$ *ve Tamsayı*



TDP Model Türleri

Tam sayı olması istenen değişken sayısına göre 3 farklı TDP Modelinden bahsetmek olanaklıdır.

1) **Saf (Hepsi) Tam Sayılı Programlama:** Bu çeşit problemlerde karar değişkenlerinin tümünün tam sayılı olması istenir.

2) **Karma Tam Sayılı Programlama:** Bazı değişkenlerin tam sayılı değerler alması istenir.

3) **Sıfır-Bir Tamsayılı Programlama:** Değişkenler sadece iki değer alabilir. (0,1)

TDP Türleri Formülasyon: Örnekler

Saf Tamsayılı Formülasyon

Maks. $Z = 10.X_1 + 25.X_2$

s.t. $X_1+X_2 \leq 20$

$X_1,X_2 \geq 0$ ve **Tamsayı**

Karma Tamsayılı Formülasyon

Maks. $Z = 10.X_1 + 25.X_2$

s.t. $X_1+X_2 \leq 20$

$X_1,X_2 \geq 0$ ve X_1; **Tamsayı**

TDP Türleri Formülasyon

- **Sıfır-Bir Tamsayılı Formülasyon**

Maks. $Z = X_1 - X_2$

s.t.

$X_1 + 2.X_2 \leq 2$

$X_1 + 2.X_2 \leq 1$

$X_1, X_2 = 0$ veya 1

Mobilyacı Örneğinin Tam Sayılı Modellenmesi

Sandalye ve koltuk üretiminde tahta ve boya kullanılmaktadır. Üretime yönelik kaynak ihtiyacı ile değişkenlerin kara olan katkıları aşağıdadır.

Ürünler	Tahta (m^3)	Boya (kg)	Kar (TL)
Sandalye	3	1	275
Koltuk	4	½	300
Toplam	92	20	

Mobilyacı Örneği: TDP Modeli

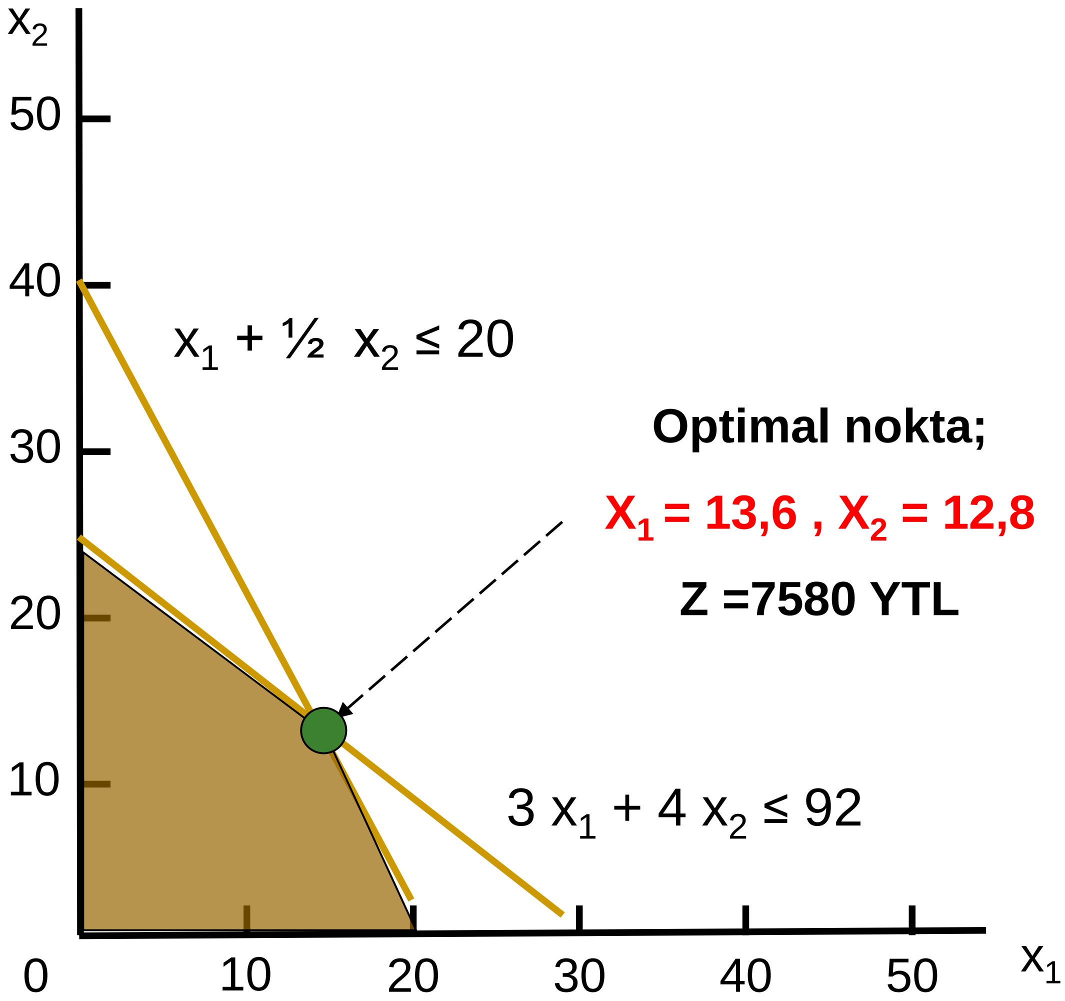
Mobilyacı mümkün olan en yüksek karı sağlayacak olan üretim bileşimini öğrenmek istemektedir.

- ***Karar değişkenleri :***
  X_1 : Üretilecek sandalye miktarı,
  X_2 : Üretilecek koltuk miktarı

- ***Amaç Fonksiyonu :***
  $Z_{maks.} = 275\ X_1 + 300\ X_2$

- ***Kısıtlar :***
  $3\ X_1 + 4\ X_2 \leq 92$ *“Toplam tahta miktarı ”*
  $X_1 + ½\ X_2 \leq 20$ *“Toplam boya miktarı”*
  $X_1, X_2 \geq 0$ ve tamsayı

Mobilyacı Örneği: DP Grafik Çözümü (Gevşetilmiş Çözüm)



Mobilyacı Örneği: TDP Çözüm Seçenekleri – Yuvarlama

13,6 tane sandalye ve 12,8 adet koltuk üretilmesi kabul edilmez ve elde edilen değerlerin bir şekilde tam sayı olması sağlanmak istenirse ne olur?

- **1. Seçenek:**
  Eldeki değerleri en yakın –alt- tam sayıya yuvarlamak!
  Üst tamsayıya yuvarlayamayız.. Neden?

  Çünkü; DP çözüm değerleri kısıtlılıklara uygundur ve simpleks bu çözümü kısıtların belirlediği uygun bölgenin köşe noktalarında bulmuştur. Değişkenler için daha yüksek bir yuvarlama uygun bölgenin dışına çıkar (maks.da).

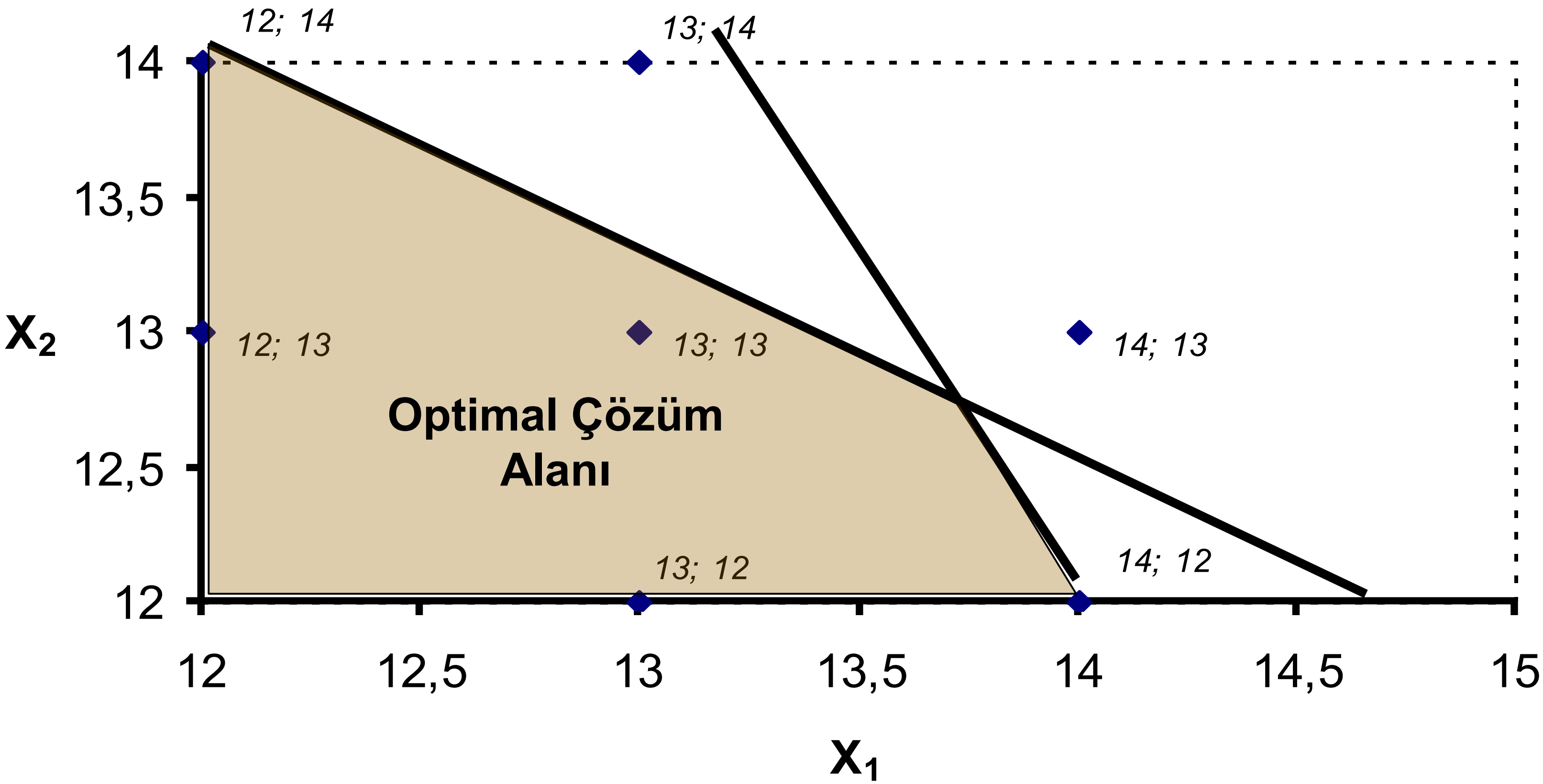
Mobilyacı Örneği: Yuvarlanmış Tamsayılı Çözüm

Sadece alt sayıya yuvarlama yaparsak optimal sonucun 13 sandalye ve 12 adet koltuk olduğunu söyleriz.. Ancak, gerçek tamsayılı çözüm bu değildir:

Değişkenlerin çözüm değerlerini çeşitli sayılara yuvarladığımızı düşünelim ve Z Değerlerini hesaplayalım.

X_1	X_2	$Z_{Maks.}$ Değeri
12	13	7200
12	**14**	**7500**
13	12	7175
13	13	7475
13	**14**	**7775**
14	12	7450
14	**13**	**7750**

Tablodaki tam sayılı değerleri grafik üzerine taşırsak..



Mobilyacı Örneği: TDP Çözüm - Yorumlar

- Grafikten görüldüğü üzere, belirlenen 7 nokta içinden **(13,14) ve (14,13) noktaları optimal çözüm alanının dışında kalmıştır**.
- Optimal üretim alanı içerisindeki *(ve üzerindeki)* noktalardan, ***(12,14)*** noktası amaç fonksiyonu değerini **7500 YTL** yaparak **tamsayılı optimal çözümü** vermektedir.
- Görüldüğü gibi bu **asıl (tamsayılı) çözüm, yuvarlanmış çözüm değerinden 7500-7175 = 325 YTL daha büyüktür**. Bu önemli bir farktır. (Gevşetilmiş DP Z=7580 idi)

Bu sakıncasına karşın *çözüm miktarları çok büyük ancak amaç fonksiyonuna birim katkıları çok düşük* değişkenlerin kullanıldığı problemlerde yuvarlama işlemi uygulanabilir.

DAL/SINIR ALGORİTMASI

DAL/SINIR ALGORİTMASI

- TDP modellerini çözümlemek için geliştirilmiş bir algoritmadır.
- Çözüme DP gevşetmesi ile başlar.
- Sürekli yeni tamsayı kısıtları konularak genişleyen bir dizi DP'nin çözülmesi ile sonuca ulaşır.
- Teorik olarak her türlü TDP'yi çözebilse de, model büyüdükçe çözüme ulaşma süresi geometrik oranda artar.

Dal – Sınır Algoritması ile çözüm

- Tam Sayılı Doğrusal Programlama Modelini Dal Sınır tekniği ile çözebilmek için
  - Modeli Gevşetilmiş olarak çöz.
  - Tam sayı olması istenen fakat kesirli çıkan değişkenlere bağlı olarak yeni kısıtlar ekle ve yeni modeli tekrar gevşetilmiş olarak çöz.
  - Sonuçları ve karar değişkenlerini değerlendirerek ya dallan ya da dalı buda.
  - Tüm dallar budanana kadar devam et.

Dal – Sınır Algoritması ile çözüm

Minimizasyon Problemlerinde

$$Z_{Gevşetilmiş} \leq Z_{Tam\ Sayılı}$$

Maksimizasyon Problemlerinde

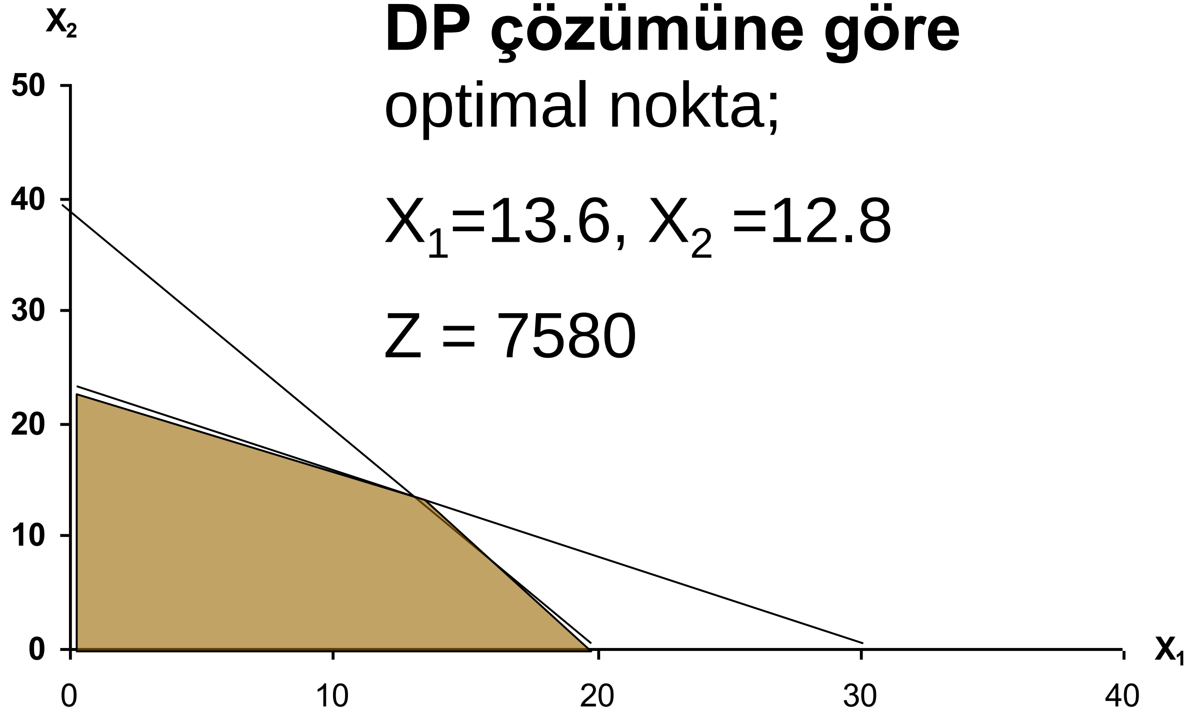
$$Z_{Gevşetilmiş} \geq Z_{Tam\ Sayılı}$$

Gevşetilmiş tamsayılı programlama probleminin optimal amaç fonksiyonu değeri TDP probleminin amaç fonksiyonu için bir üst sınır oluşturur!

(Eşitlikte zaten aynı zamanda tamsayılı optimal çözüm bulunmuştur.)

Mobilyacı Örneği: Dal/Sınır Algoritması (1)

1) Kesirli olan kısımları çözümden çıkarırız.. Yani modele yeni tamsayı kısıtları ekleriz.



DP çözümüne göre optimal nokta;

X_1=13.6, X_2 =12.8

Z = 7580

Mobilyacı Örneği: Dal/Sınır Algoritması (2)

X_1’in alt ve üst değerlerini belirleyelim;

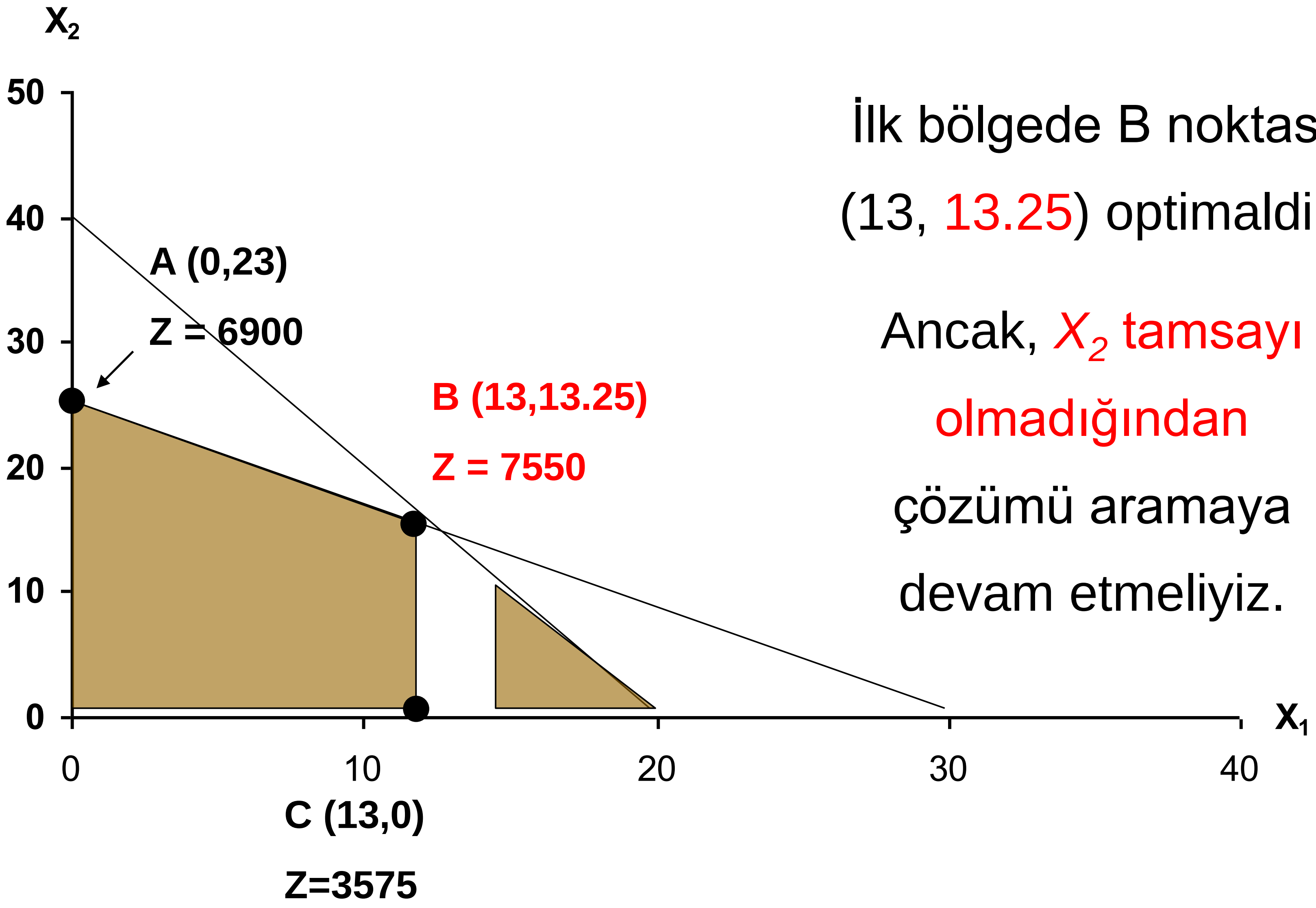
$13<X_1<14$ aralığında X_1 tamsayılı çözüm değeri alamaz ve bu aralık çözüm alanından çıkarılır.

Aşağıdaki iki yeni kısıtla beraber iki ayrı model üretilir:

$X_1 \leq 13$ *ve* ***$X_1 \geq 14$***

Şimdi optimal üretim alanı iki ayrı bölgede aranacaktır ➔

Mobilyacı Örn.:Dal/Sınır Algoritması (3)



İlk bölgede B noktası (13, 13.25) optimaldir!

Ancak, X_2 tamsayı olmadığından çözümü aramaya devam etmeliyiz.

Mobilyacı Örneği: Dal/Sınır Algoritması (4)

X_2'nin alt ve üst değerlerini belirleyelim;

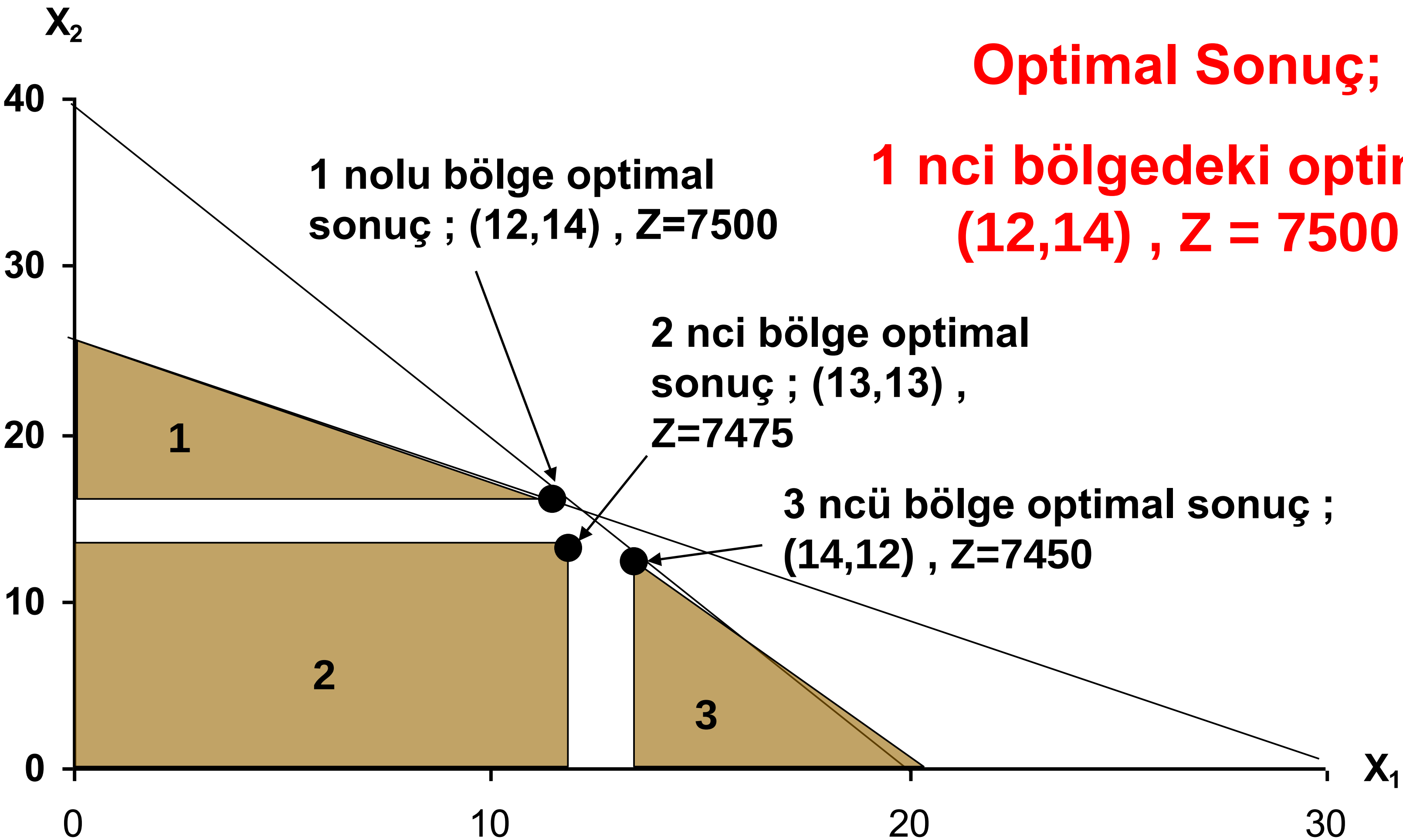
12< X_2 <13 aralığında X_2 tamsayılı çözüm değeri alamaz ve bu aralık çözüm alanından çıkarılır.

İki yeni kısıt daha eklenir.

$\boldsymbol{X_2 \leq 12}$ *ve* $\boldsymbol{X_2 \geq 13}$

Şimdi optimal üretim alanı üç ayrı bölgede aranacaktır ➔

Mobilyacı Örneği: Dal/Sınır Algoritması (5)



Optimal Sonuç;

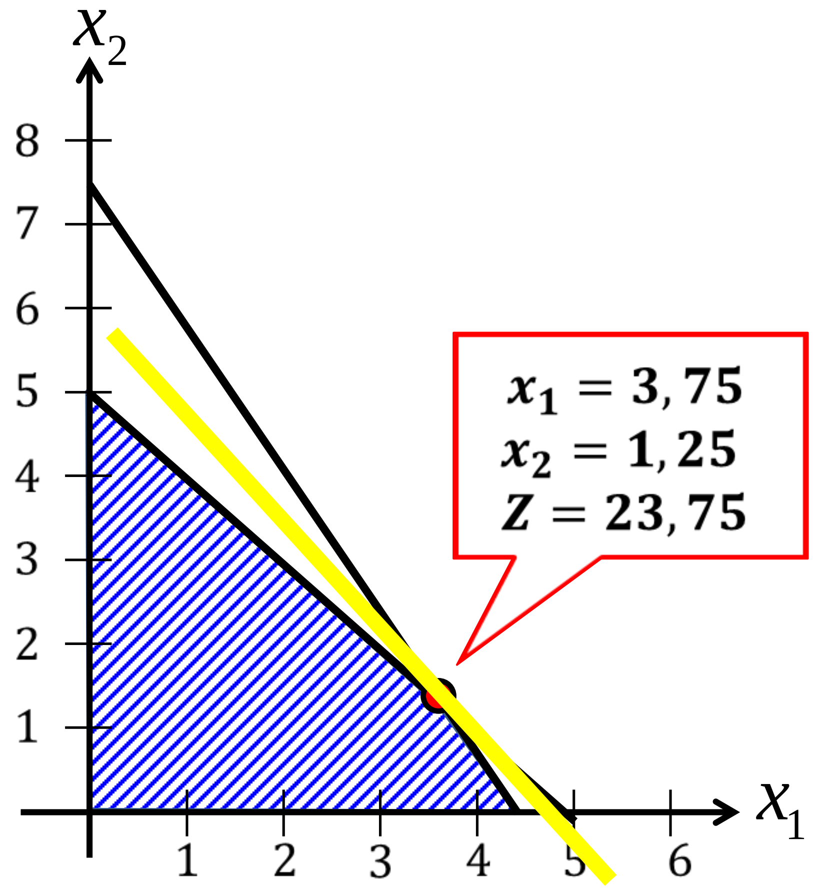
1 nci bölgedeki optimal (12,14) , Z = 7500

Dal – Sınır Algoritması ile çözüm

$$Maks\ Z = 5x_1 + 4x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ ve tam sayı}$$

Dal – Sınır Algoritması ile çözüm

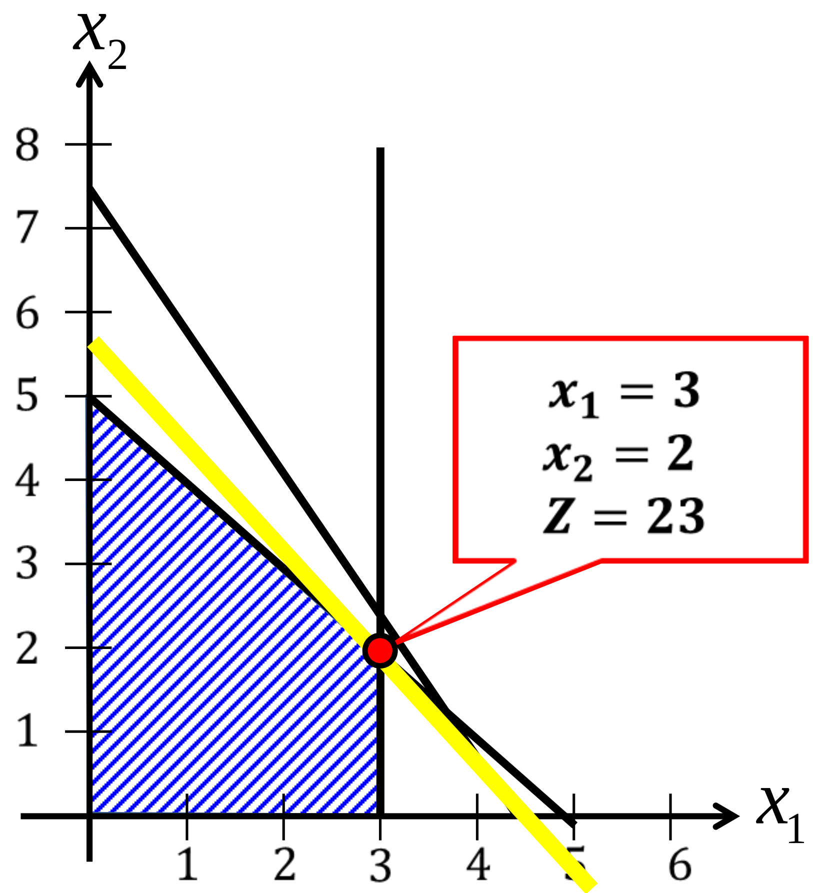
$$Maks\ Z = 5x_1 + 4x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Dal – Sınır Algoritması ile çözüm

$$Maks\ Z = 5x_1 + 4x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$Maks\ Z = 5x_1 + 4x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$
$$\boldsymbol{x_1 \leq 3}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



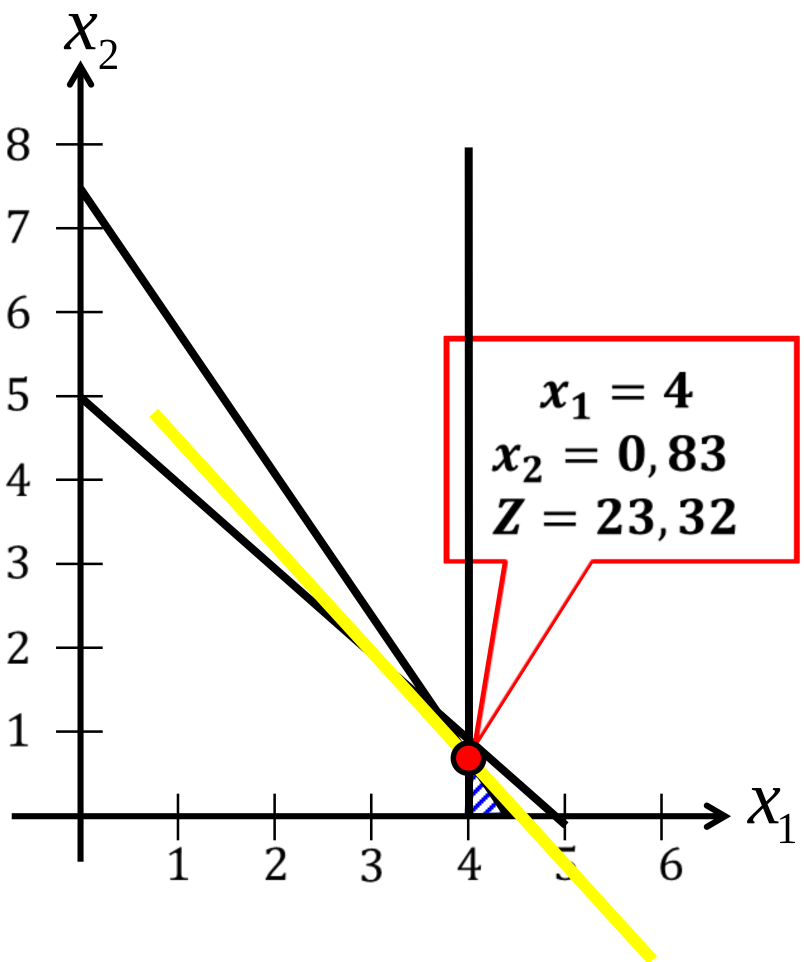
Bu çözümde her iki değişkenin değeri de tamsayı. Bu dal burada sona erer. Bu aynı zamanda bir **"alt sınır"**dır. Bundan daha iyi bir tamsayılı çözüm bulmak için diğer çözümlere de bakılmalı (diğer dallardan)…

Dal – Sınır Algoritması ile çözüm

$$\begin{aligned} Maks\ Z &= 5x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 &\le 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\le 45 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Maks\ Z &= 5x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 &\le 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\le 45 \\ \boldsymbol{x_1} &\le \mathbf{3} \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Maks\ Z &= 5x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 &\le 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\le 45 \\ \boldsymbol{x_1} &\ge \mathbf{4} \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$



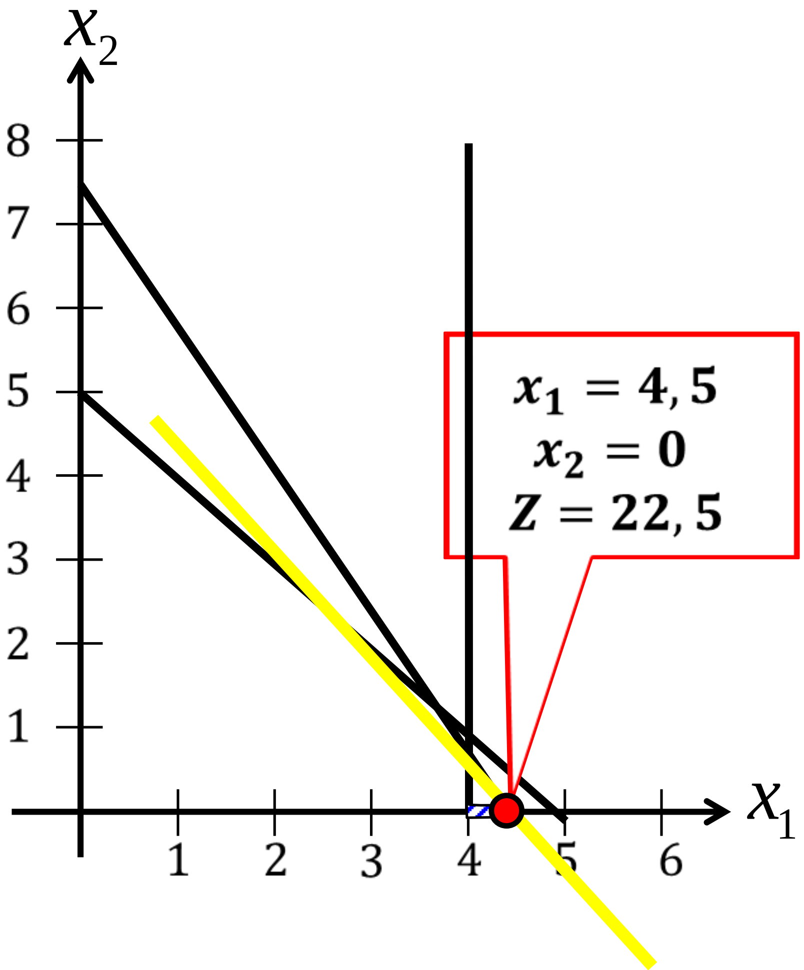
Dal – Sınır Algoritması ile çözüm

$$\begin{aligned} Maks\ Z &= 5x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 &\le 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\le 45 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Maks\ Z &= 5x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 &\le 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\le 45 \\ \boldsymbol{x_1} &\boldsymbol{\le 3} \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Maks\ Z &= 5x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 &\le 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\le 45 \\ \boldsymbol{x_1} &\boldsymbol{\ge 4} \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Maks\ Z &= 5x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 &\le 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\le 45 \\ \boldsymbol{x_1} &\boldsymbol{\ge 4} \\ \boldsymbol{x_2} &\boldsymbol{\le 0} \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$



Dal – Sınır Algoritması ile çözüm

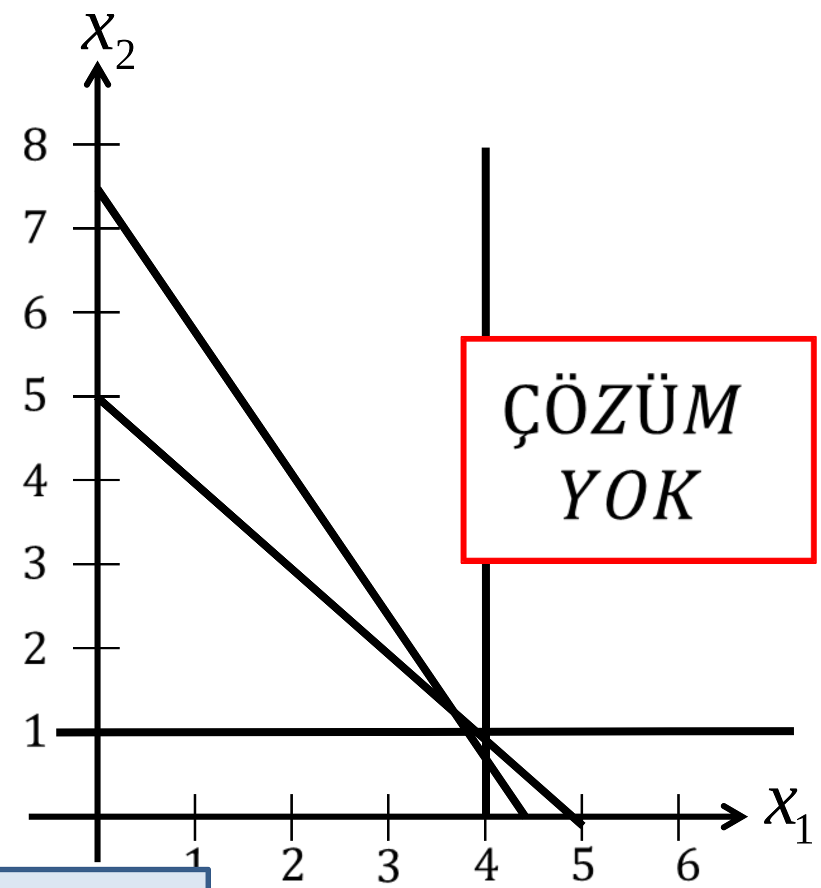
$$\begin{aligned} Maks\ Z &= 5x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 &\le 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\le 45 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Maks\ Z &= 5x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 &\le 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\le 45 \\ \boldsymbol{x_1} &\le \mathbf{3} \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Maks\ Z &= 5x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 &\le 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\le 45 \\ \boldsymbol{x_1} &\ge \mathbf{4} \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Maks\ Z &= 5x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 &\le 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\le 45 \\ \boldsymbol{x_1} &\ge \mathbf{4} \\ \boldsymbol{x_2} &\le \mathbf{0} \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Maks\ Z &= 5x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 &\le 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\le 45 \\ \boldsymbol{x_1} &\ge \mathbf{4} \\ \boldsymbol{x_2} &\ge \mathbf{1} \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$



Dal – Sınır Algoritması ile çözüm