Tamsayılı Diğer Modeller - Örnekler

Tam Sayılı Modeller

- Tam Sayılı model türleri
  - Tümü tam sayılı modeller
  - Karışık tam sayılı modeller
  - 0 – 1 tam sayılı modeller

Hepsi Tamsayılı Modelleme Örneği

Bir işletmenin müşteri ilişkileri bölümüne her gün gelen telefon sayısı ile bunların cevaplanması için gereken eleman sayısı günlük bazda aşağıdadır.

Personel politikası gereğince **her eleman 5 gün üst üste çalışıp, sonraki 2 gün izin kullanmaktadır**.

Günlük *gerekli sayıda eleman bulundurulması kaydıyla toplam eleman sayısını minimize eden* planlamayı yapınız.

Günler	**Telefon Sayısı (‘000)**	**Eleman Sayısı**
Pazar	58	8
Pazartesi	42	6
Salı	35	5
Çarşamba	25	4
Perşembe	44	6
Cuma	51	7
Cumartesi	68	9

Karar Değişkenleri

Amacımız işletmede mümkün olan en az (min) sayıda personel çalıştırarak gereken işgücü ihtiyacını karşılamaktır.

Karar değişkenlerimizi tanımlayalım
(Benzer problemler için "İpucu": Karar değişkenlerini "Her vardiyada işe başlayan eleman sayısı" olarak belirleyin)

$\mathbf{X_1}$: Pazar günü işe başlayan eleman sayısı
$\mathbf{X_2}$: Pazartesi günü işe başlayan eleman sayısı
$\mathbf{X_3}$: Salı günü işe başlayan eleman sayısı
$\mathbf{X_4}$: Çarşamba günü işe başlayan eleman sayısı
$\mathbf{X_5}$: Perşembe günü işe başlayan eleman sayısı
$\mathbf{X_6}$: Cuma günü işe başlayan eleman sayısı
$\mathbf{X_7}$: Cumartesi günü işe başlayan eleman sayısı

Model

$$Z_{min.} = X_1 + X_2 + X_3 + X_5 + X_6 + X_7$$

s.t.

$$
\begin{aligned}
X1 + \quad\quad\quad\quad + X4 + X5 + X6 + X7 &\geq 8 \ (Pazar) \\
X1 + X2 + \quad\quad\quad\quad + X5 + X6 + X7 &\geq 6 \ (Pazartesi) \\
X1 + X2 + X3 + \quad\quad\quad\quad + X6 + X7 &\geq 5 \ (Salı) \\
X1 + X2 + X3 + X4 + \quad\quad\quad\quad + X7 &\geq 4 \ (Çarşamba) \\
X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + \quad\quad\quad\quad &\geq 6 \ (Perşembe) \\
X2 + X3 + X4 + X5 + X6 + \quad\quad &\geq 7 \ (Cuma) \\
X3 + X4 + X5 + X6 + X7 &\geq 9 \ (Cumartesi)
\end{aligned}
$$

Bütün Değişkenler ≥ 0 ve tamsayı

ÖRNEK -2

7-23 saatleri arasında çalışan bir restoranda tam-zamanlı (8saat), yarı-zamanlı (4 saat) elemanlar çalışmaktadır. Ortalama 50 kişi için 1 personelin çalışması durumunda hizmetin aksamadığı bilinmektedir. Tam zamanlı vardiyalar için ücret 30 TL iken yarı zamanlı vardiya ücretleri ise farklılaşmaktadır. Müşteri yoğunluğu (ikişer saatlik zaman dilimleri için) ve yarı zamanlı vardiya ücretleri aşağıda verilmiştir.

Restoran 11-13 öğlen ve 17-19 akşam yemeği zamanlarında en azından 5'er tam zamanlı personelin çalışıyor olmasını, çalışanların en az %50 sinin yarı zamanlı personel olmasını istemektedir.

Günlük *işgücü maliyetini minimize eden* planlamayı yapınız.

Vardiya	**Müşteri yoğunluğu**	**Yarı Zamanlı Vardiyalar ve Ücretleri**
07-09	600	15
09-11	400	15
11-13	850	13
13-15	350	13
15-17	300	13
17-19	700	13
19-21	450	-
21-23	150	-

Karar Değişkenleri

Karar Değişkenleri: “Bir vardiyada çalışacak tam zamanlı yarı zamanlı personel sayısı”

X_1: 07-11 vardiyasında çalışacak yarı zamanlı personel sayısı
X_2: 11-15 vardiyasında çalışacak yarı zamanlı personel sayısı
X_3: 15-19 vardiyasında çalışacak yarı zamanlı personel sayısı
X_4: 19-23 vardiyasında çalışacak yarı zamanlı personel sayısı
X_5: 07-15 vardiyasında çalışacak tam zamanlı personel sayısı
X_6: 11-19 vardiyasında çalışacak tam zamanlı personel sayısı
X_7: 15-23 vardiyasında çalışacak tam zamanlı personel sayısı

Model

$$Z_{min.} = 15X_1 + 13X_2 + 13X_3 + 15X_4 + 30X_5 + 30X_6 + 30X_7$$

s.t.

X1 + X5 ≥ 12 (09-11 kısıtını kapsayan 07-09 kısıtı)
X2 + X5 + X6 ≥ 17 (13-15 kapsayan 11-13 kısıtı)
X3 + X6 + X7 ≥ 6 (15-17 kapsayan 17-19 kısıtı)
X4 + X7 ≥ 9 (21-23 kapsayan 19-21 kısıtı)

X5 + X6 ≥ 5 (11-13 en az 5 tam zamanlı)
X6 + X7 ≥ 5 (17-19 en az 5 tam zamanlı)

X1 + X2 + X3 + X4 ≥ 0.5 (X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 + X7) (yarı-zamanlı / tam-zamanlı oranı)

Bütün Değişkenler ≥ 0 ve tamsayı

(0-1) Tam Sayılı Programlama ve Mantık Kısıtları

- (0-1) TDP’nin özel bir türüdür. Değişkenler yalnızca iki değer (0 veya 1) alabilir.

- Pek çok karar problemi “evet-hayır”, “0-1”, “doğru-yanlış”, ”üret-üretme” gibi önermeleri içeren ikili değişken yapıda olabilir. Burada **“0” olumsuz** durumu , **“1” ise olumlu** durumu yansıtır.

- Bazı **mantıksal ifadeleri içeren kısıtlar**ın da modele dahil edilmesi gerekebilir:

  “Ankara’ya fabrika kurarsak Kayseri’ye kurmamalıyız”

  “1 nolu projeye yatırım yaparsak 2 nolu projeye yatırım yapamayız”

  “İki kampanyayı bir arada yapmalıyız ya da yapmamalıyız” gibi..

(0-1) Tam Sayılı Programlama Örneği

3 yıllık bir persfektifte, 3 farklı yatırım projesi değerlendirilecektir. Önümüzdeki 3 yıl boyunca uygulamaya konulacak projeleri belirleyiniz.

Amaç: toplam getirinin maksimize edileceği şekilde "hangi" projelere yatırım yapılacağının belirlenmesi

Proje	**Harcamalar (Nakit Yatırım)**			
	1. Yıl	**2. Yıl**	**3. Yıl**	**Getiri *(M. YTL)***
1	1	7	6	21
2	8	5	12	38
3	3	4	6	18
Kaynak *(M. YTL)*	15	14	18	

(0-1) TDP Örnek: Model

Her proje içi verilebilecek karar iki tanedir. Proje ya **"kabul"** ya da **"red"** edilecektir.

Karar değişkenleri: Xi, i = 1,2,3 nolu projeler

$$X_i \begin{cases} 1, kabul \\ 0, ret \end{cases}$$

$Z_{max.} = 21\,X_1 + 38\,X_2 + 18\,X_3$ *(Getirinin maksimizasyonu)*

s.t.

$$\left.\begin{aligned} 1\,X_1 + 8\,X_2 + 3\,X_3 &\le 15 \\ 7\,X_1 + 5\,X_2 + 4\,X_3 &\le 14 \\ 6\,X_1 + 12\,X_2 + 6\,X_3 &\le 18 \\ Xi = (0,1) & \end{aligned}\right\}$$

(Projelerin nakit çıkışları yıllık bütçe sınırı içinde olmalıdır)

(0-1) TDP Örnek 2

Kargo Yükleme Problemi

Bir kargo uçağının 8.000 kg'lık taşıma kapasitesi vardır. Uçak, her uçuşta aşağıdaki kargo türlerinden taşıyabilir. Her kargo türünün ağırlığı ve sağlayacağı kar aşağıda sunulmuştur.

	Ağırlık (kg)	Toplam Kar (Bin YTL)
1	1000	100
2	4000	600
3	3000	400
4	2000	250

(0-1) TDP Örnek 2: Model

Her uçuş için kapasiteyi geçmeyecek şekilde toplam karı maksimize eden bir formülasyon yapınız.

Karar değişkenleri: *Xi, i =1,2,3,4 kargo türleri*

Eğer "i." kargo taşınacaksa Xi =1

Eğer "i." kargo taşınmayacaksa Xi = 0

Maks. $Z = 100.X_1 + 250.X_2 + 400.X_3 + 600.X_4$

s.t.

$1000.X_1+2000.X_2+3000.X_3+4000.X_4 \leq 8000$ *(kapasite kısıtı)*

$X_1, X_2 = (0,1)$

(0,1) değişkenler ve Mantık Kısıtları

(0,1) tamsayı değişkenler yardımıyla çeşitli mantıksal şartları içeren kısıtlar da modellere dahil edilebilir.

ÖRNEK ➔

Mantık Kısıtları :Örnek

Bir Şirket 6 yatırım alternatifini değerlendirmektedir. Bu projelerle ilgili bilgiler aşağıdadır. En çok net karı veren yatırım bileşimini bulunuz.

PROJE	AÇIKLAMA	MALİYET	NET GELİR
1	Yeni bir ayakkabı fabrikasının kurulması	300	250
2	X şehrindeki ayakkabı fabrikasının satın alınması	200	175
3	Deri işleme fabrikası satın alınması	150	210
4	Otel satın alınması	600	300
5	Turizm Şirketi Kurulması	100	75
6	Süpermarket Zinciri Oluşturulması	225	240

Formülasyon

- Karar değişkenleri:

  X_i, i =1, 2, 3, 4, 5, 6 projeler

- *Amaç Fonk.*

  $Z_{max.} = 250X_1 + 175X_2 + 210X_3 + 300X_4 + 75X_5 + 240X_6$

Mantık Kısıtları : Örnek devam..

Yatırımların değerlendirilmesi esnasında dikkat edilmesi gereken koşullar şu şekildedir:

- Projelerden en fazla 4 tanesi seçilecektir.
- Gerekli çeşitlendirmenin sağlanabilmesi için en az iki proje seçilecektir.
- Ayakkabı işinde en fazla bir proje seçilecektir.
- Proje 1 ile 3 birbirleriyle ilişkilidir. 1 seçilmezse 3'de seçilemez.
- Benzer şekilde 4 ve 5. projeler birliktedir. Ya ikiside seçilecek ya da ikisi birden reddedilecektir.
- Toplam yatırım miktarı 1200 milyardır.

Mantık Kısıtları

- 1.Kısıt: Projelerden sadece dört tanesi (en fazla 4 tanesi) seçilebilir. Seçilen projeyi ifade eden Xi değeri 1 olacağına göre izin verilen son sınır ∑Xi = 4 olmasıdır. Buna göre;

$$X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 \leq 4$$

- 2.Kısıt: Projelerden en az iki tanesinin seçilmesi gerekmektedir.

$$X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 \geq 2$$

Mantık Kısıtları

- 3.Kısıt: 2 ayakkabı yatırımından sadece birinin yapılması. (1. kısıta benziyor)

$$X1 + X2 \leq 1$$

- 4.Kısıt: 1 seçilmezse 3'de seçilemez.

$$X1 \geq X3$$

(Açıklama: Bu ifade ancak 1. proje seçilirse,3. proje de seçilebilir anlamına gelir. X1=1 olursa X3 = 0, 1 olabilir; X1=0 olursa X3 = 0 olmak zorundadır. Her durumda X1 ≥ X3 tür.)

- 5.Kısıt: 4 ve 5. projeler ya birlikte seçilecek ya da ikisi birden reddedilecektir. (iki kampanya ya birlikte yapılacak ya da yapılmayacaktır gibi başka örnekler de olabilir)

$$X4 = X5$$

Mantık Kısıtları

- 6.Kısıt: Bütçe Kısıtı

$$300X1 + 200\ X2 + 150\ X3 + 600\ X4 + 100\ X5 + 225\ X6 \leq 1200$$

- X1 , X2 , X3 , X4 , X5 , X6 = (0,1)

KUPA FİNALİ

BJK teknik direktörü Mustafa DENİZLİ bugün FB ile yapılacak kupa finali öncesi takımının ilk 11'ini belirlemek istemektedir. Mustafa Hoca, ilk 6 oyuncu için kararını vermiştir, ancak kalan 5 oyuncuyu 8 aday arasından stratejileri doğrultusunda seçmek istemektedir.

Tabloda oyuncuların oynadıkları mevkiler ile geçmiş birkaç maça ait istatistikleri gösterilmektedir. Tabloda ilk 6 oyuncunun istatistikleri toplu olarak ilk satırda, geri kalan 8 aday oyuncunun verileri ise ayrı ayrı sonraki satırlarda yer almaktadır.

- Denizli bu maçla ilgili olarak çeşitli stratejiler belirlemiştir. Buna göre; takımı 3-4-3 düzeninde oynatacaktır (yani, 1 Kaleci, 3 Geri, 4 Orta, 3 İleri). İlk 11'in gol ortalaması en az 0.9 olmalıdır. İlk onbirin toplam top kaybı 25'i aşmamalıdır. Tello veya Nobre'den biri oynatılacaktır. Eğer Delgado oynarsa Ekrem Dağ da oynamalıdır.

Hoca, bu stratejiler doğrultusunda takım oyunu başarı derecesini maksimize edecek ilk 11'i sahaya sürmek istemektedir. Denizli'nin bu ilk onbiri belirlemesine yardımcı olacak tamsayılı doğrusal programlama modelini kurunuz. Modelin unsurları ile ilgili kısa açıklamalar yapınız.

Oyuncu	Mevki	Gol Ortalaması	Top Kaybı	Faul	Takım Oyunu Başarısı
İlk 6 Oyuncunun:	1 Kaleci 1 İleri 2 Geri 2 Orta Saha	Ortalama: 0.9	Toplam: 13	Toplam: 28	Toplam: 24
1. T. Sivok	Geri	0.8	2	7	3
2. Gökhan Zan	Geri	0.6	3	5	2
3. Delgado	Orta	1.5	3	3	3
4. Tello	Orta	1	2	3	3
5. Ekrem Dağ	Orta	1.8	2	5	4
6. Holosko	İleri	2	2	3	5
7. Nobre	İleri	1	2	2	3
8. Da Silva	İleri	2.1	4	2	3

KARIŞIK (KARMA) TDP

- Karar değişkenlerin bir kısmının tamsayı diğerlerinin normal değişken olduğu modeller.

- Bunlara en güzel örnek değişken maliyetlerin yanında sabit maliyetleri de içeren üretim problemleridir. ÖRNEK ➔

Örnek: KARIŞIK (KARMA) TDP

4 yeni ürün için fizibilite çalışması yapılmaktadır.

Her bir ürün için -eğer üretimine karar verilirse- bir üretim hattı hazırlanması gerekmektedir. (sabit hazırlık maliyeti).

Her ürün temelde üç üretim aşamasından geçecektir.

Her bir ürün için gerekli hazırlık maliyeti, her üretim aşamasında geçirdikleri süreler ve öngörülen birim karlar tabloda verilmektedir ➔

Örnek: KARIŞIK (KARMA) TDP

	Üretim Süresi (sn)				
Üretim Aşamaları	Ürün 1	Ürün 2	Ürün 3	Ürün 4	Mevcut Kapasite (sn)
1	10	15	30	15	300000
2	30	15	20	12	150000
3	25	30	10	8	200000
Birim Kar (YTL)	6	5.3	5	3.5	
Hazırlık Maliyeti (YTL)	4300	4000	4500	4400	

Bu problemi basit bir üretim probleminden ayıran özellik aynı anda iki kararın verilmek istenmesidir:

1) Hangi ürün üretilecek, 2) üretilirse ne kadar üretilmeli?

Örnek: KARIŞIK (KARMA) TDP

- Karar değişkenleri:

  X_i : i ürününden üretim yapılacak miktar

  Y_i : i ürününün üretilip üretilmemesi

  (Eğer $Y_i = 1$ ise $X_i > 0$; Eğer $Y_i = 0$ ise $X_i = 0$ olmalı)

- Amaç Fonksiyonu (Toplam Kar Max):

$$Z_{max} = 6X_1 + 5.3X_2 + 5X_3 + 3.5X_4 - 4300Y_1 - 4000\,Y_2 - 4500\,Y_3 - 4400\,Y_4$$

Örnek: KARIŞIK (KARMA) TDP

- Kaynak kullanım kısıtları (Süre Sınırları):

$10X1 + 15\ X2 + 30\ X3 + 15\ X4 \leq 300000$

$30X1 + 15\ X2 + 20\ X3 + 12\ X4 \leq 150000$

$25X1 + 30\ X2 + 10\ X3 + 8\ X4 \leq 200000$

- *Bütün X'ler ≥ 0 ve Yi = (0,1)*

Örnek: KARIŞIK (KARMA) TDP

- Bu modelde bu haliyle bir eksiklik söz konusudur. Amaç fonksiyonuna tekrar bakalım:

$$Z_{max} = 6X_1 + 5.3X_2 + 5X_3 + 3.5X_4 - 4300Y_1 - 4000\,Y_2 - 4500\,Y_3 - 4400\,Y_4$$

- Yi lerin amaca negatif katkısı olduğundan 1 değerini almaları matematiksel olarak mümkün olmaz. Halbuki, bir Yi'ye karşılık gelen Xi çözümde yer alırsa "hazırlık maliyeti yapılmadan bu ürün üretilmiş olur".

- O halde her hangi bir i ürünü üretime girdiğinde onun hazırlık maliyetinin de 1 olmasını sağlayan bir yapı oluşturmamız gerekir. Bu, iki değişkeni bağlayan kısıtların eklenmesi ile gerçekleşir.

Örnek: KARIŞIK (KARMA) TDP

- Yani Xi 0'dan büyük bir değer aldığında karşılığı olan Yi ≥ 0 (yani =1) olmalıdır.

- Bu kısıt $M_i . Y_i \geq X_i$ kısıtıdır. (Mi büyük bir sayı)
  Neden $Y_i \geq X_i$ olmadı? Çünkü böyle yazarsak örn. X1 = 500 olduğunda Y1 i 500'den büyük olmaya zorlar. Halbuki Yi (0,1) tamsayı olduğu için çözüm bulunmaz.

- Bu kısıta göre Xi >0 değeri aldığında Yi hiçbir zaman 0 değeri alamaz. Mi yeterince büyükse Yi=1 değerini alır.

- Peki Mi nasıl hesaplanacak? Her bir Xi için teorik olarak alabileceği en büyük değeri alabiliriz. Yani diğer X'ler = 0 olursa bir Xi en büyük değeri alır.

Örnek: KARIŞIK (KARMA) TDP

- Örneğin X1 için X2,X3,X4 = 0 alalım. Ve bu değerleri kaynak kısıtlarında yerlerine koyalım.

  $10X1 + 15\,(0) + 30\,(0) + 15\,(0) = 300000$

  $30X1 + 15\,(0) + 20\,(0) + 12\,(0) = 150000$

  $25X1 + 30\,(0) + 10\,(0) + 8\,(0) = 200000$

- Buradan X1 = 30000; X1 = 5000; X1 = 8000 bulunur. Tüm kısıtları da sağlayan min X1 = 5000 olduğundan bu M1 olarak alınır.

- Aradığımız “Bağlantı Kısıtı”: $(5000)Y1 \geq X1$ olacaktır.

- Diğer bağlantı kısıtları da ise benzer şekilde:

  $(6666.7)Y2 \geq X2$

  $(7500)Y3 \geq X3$

  $(12500)Y4 \geq X4$

  bulunur.

KARMA TDP ÖRNEK FORMÜLASYON: SONUÇ

Amaç Fonksiyonu:

$Z_{max} = 6X1 + 5.3X2 + 5X3 + 3.5X4 - 4300Y1 - 4000\ Y2 - 4500\ Y3 - 4400\ Y4$

KISITLAR:

$10X1 + 15\ X2 + 30\ X3 + 15\ X4 \leq 300000$
$30X1 + 15\ X2 + 20\ X3 + 12\ X4 \leq 150000$
$25X1 + 30\ X2 + 10\ X3 + 8\ X4 \leq 200000$

$(5000)Y1 \geq X1$
$(6666.7)Y2 \geq X2$
$(7500)Y3 \geq X3$
$(12500)Y4 \geq X4$

Bütün X'ler ≥ 0 ve Yi = (0,1)

AYRICA, eğer üretici “X1’den üretim yapacağı durumda en az 2000 birim üretmeyi” düşünüyorsa X1 için iki bağlantı kısıtı yazılır. vb.

$$5000\,Y1 \geq X1$$

$$2000\,Y1 \leq X1$$

Sınavlarda Başarılar ve İyi Tatiller..