# OPTİMİZASYON TEKNİKLERİNE GİRİŞ:

**Hazırlayan: Doç. Dr. Şebnem Arslan**

## 1. Giriş

Optimizasyon, matematiksel olarak tanımlanabilen bir problemi çözebilmek için en iyi kararı verme sanatıdır. Bir optimizasyon probleminde amaç, bir fonksiyonu minimize veya maksimize etmektir. Bu fonksiyon (amaç fonksiyonu) karar değerlerini belirleyen değişkenlere bağlıdır. Bu değişkenlerin değerleri ise bazı kısıtlamalara uyacak şekilde sınırlanmıştır. Matematiksel olarak ifade edilecek olursa, problem aşağıdaki şekilde gösterilir:

Optimize et (Maksimize veya minimize et) $Z= f(x_1, x_2, x_3,....., x_n)$

$$\begin{Bmatrix} g_1(x_1, x_2, \ldots\ldots.., x_n) \\ g_2\,(x_1, x_2, \ldots\ldots.., x_n) \\ g_3(x_1, x_2, \ldots\ldots.., x_n) \\ . \\ . \\ g_m\,(x_1, x_2, \ldots\ldots.., x_n) \end{Bmatrix} \geq veya \ \leq \ veya \ = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ b_m \end{Bmatrix}$$

Yukarıdaki denklemde n değişken sayısını, m kısıtlayıcı sayısını, Z ise amaç fonksiyonunu göstermektedir.

Problemde $Z= f(x_1, x_2, x_3,....., x_n)$ ile sistem performans ölçütü ifade edilmiş, karar değişkenleri $x_1, x_2, x_3,....., x_n$'in bu ölçütü maksimize veya minimize edecek değerlerinin bulunması hedeflenmiştir. Sistem özelliklerini kısıtlayıcılar $[g_1(x_1, x_2, \ldots\ldots.., x_n), g_{2.....}]$ belirlemektedir.

Amaç fonksiyonu bir madeni işletme maliyetini minimize edecek, karı maksimize edecek veya enerji kullanımını minimize edecek şekilde bir fonksiyon olarak tanımlanabilir. Öte yandan, kısıtlayıcı fonksiyonlar bir işte çalıştırabilecek toplam işçi sayısı, bu işçilerin kaç saat çalıştırılacağı, bir makinenin o makine için ayrılmış olan alan içinde kalacak şekilde boyutlarının belirlenmesi veya bir yapının hasara uğramadan üzerine gelen yükleri taşıyabilecek şekilde tasarlanması olarak tanımlanabilir.

Optimizasyon problemi çözerken öncelikle karar (tasarım) değişkenini tanımlamak, amaç fonksiyonunu kurmak ve kısıtlayıcı fonksiyonları belirlemek gerekmektedir. Daha sonra uygun metod seçilerek problem çözülmelidir.

## 2. Optimizasyon problemlerinin sınıflandırması

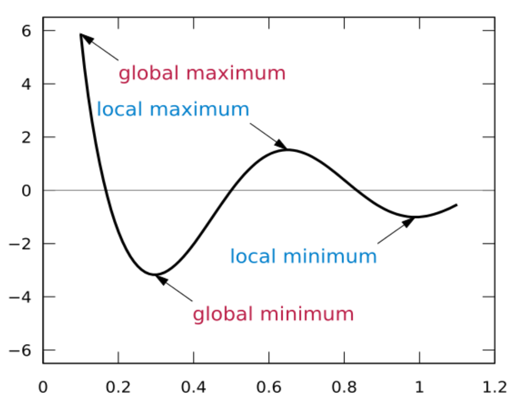
Optimizasyon problemleri Tablo 1'deki şekilde sınıflandırılırlar. Lineer probleme bir örnek vermek gerekirse $Z= 3x_1+ 5x_2 + 8x_3$, doğrusal olmayan probleme örnek olarak $Z= 3x_1{*}x_2^3$ fonksiyonu verilebilir.

Tablo 1. Optimizasyon problemlerinin sınıflandırması

| **Karakteristik** | **Özellik** | **Sınıflandırma** |
|---|---|---|
| Tasarım değişkenlerin sayısı | 1 | Tek değişkenli |
| | 1'den fazla | Çok değişkenli |
| Problem formülasyonu | Kısıtlama var | Sınırlı |
| | Herhangi bir kısıtlama yok | Sınırsız |
| Amaç ve kısıtlayıcı fonksiyonlar | Doğrusal fonksiyon | Lineer (Doğrusal) |
| | Kuadratik fonksiyon | Kuadratik |
| | Doğrusal olmayan fonksiyon | Doğrusal olmayan |
| Tasarım değişkenlerinin türü | Tamsayı | Tamsayı |
| | Sürekli | Sürekli |

## 3. Lineer (doğrusal) olmayan programlama

Doğrusal olmayan bir $f(x)$ fonksiyonunun $x^*$ noktasında bir lokal minimumu vardır diyebilmek için fonksiyonun 0 olmayan ilk türevinde ( mesela n'inci türevinde -n çift sayı olmalı) $f^n(x^*)$ pozitif olmalıdır. Lokal maksimum için ise $f^n(x^*)$ negatif olmalıdır. Herhangi bir doğrusal olmayan fonksiyonun bir aralıkta [a, b] global maksimum veya minimum değerini bulmak için öncelikle fonksiyonun türevi alınır ve 0'a eşitlenir, sabit noktalar bulunur. Daha sonra, a ve b'yi de içine alacak şekilde tüm sabit noktaları lokal optimum olarak değerlendirmek gerekir. Bunun için ikinci türeve bakılır. Eğer ikinci türev sabit noktada 0'dan küçükse o nokta global maksimum, büyük ise o nokta global mininum olarak adlandırılır.




Şekil 1. $\cos(3\pi x)/x$ fonksiyonunun $0.1 \leq x \leq 1.1$ aralığında minimum ve maksimum değerlerini gösteren şekil (Kaynak wikipedia.org).

## 4. Optimum Arama Yöntemleri

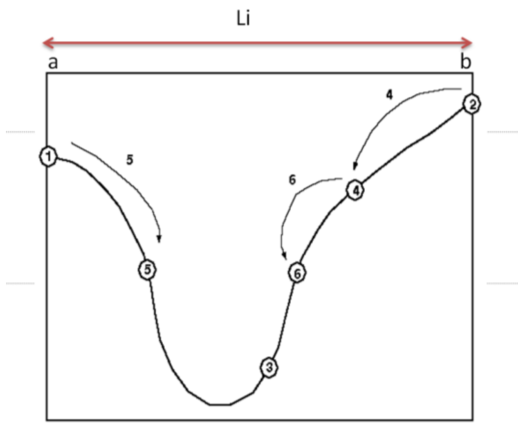
Bazen hesap yaparak bir fonksiyonun optimum değerini belirlemek mümkün olmaz. Eğer amaç fonksiyonu analitik olarak tanımlanamıyorsa, türev almak imkansız ise veya cebir ile sabit noktalar elde edilemediyse bazı arama yöntemleri ile lokal optima izin verilebilir bir hata payı ile yaklaşık olarak bulunabilir.

Amaç fonksiyonun belirli bir aralıkta tek bir optimuma sahip olduğunu varsayarsak (yani fonksiyon unimodal) sistematik olarak optimum aranan aralığı azaltarak kabul edilebilir limitlere göre optimum bulunabilir (Şekil 2).

Eleme teknikleri Bölge Eleme Yöntemi, Fibonacci araması ve üç nokta aralık araması gibi farklı yöntemlerle uygulanabilir. Burada sadece Bölge Eleme Yöntemi irdelenecektir.

**4.1. Bölge Eleme Yöntemi**

Bu teknik $(\sqrt{5}-1)/2$=0.618 sayısına dayanır. Bizim araştırma yapacağımız aralıkta [a, b] ilk iki nokta iki uçtan 0.618*(b-a) uzaklıkta olacaktır. Yani arama yapılan aralığa Li dersek, her seferinde belirlenen uç noktadan 0.618Li uzaklıkta noktalarda arama yapılacaktır (Şekil 2). Örneğin bir akiferin en derin kısmını bulmak için yapılan çalışmalarda böyle bir yöntem kullanmak yerine rastgele sondaj açılırsa daha fazla para ve zaman gider.




Şekil 2. Bir akiferin en derin yerini bulmak için Bölge Eleme Yönteminin (Golden Section Search) kullanılması (Kaynak: http://www2.geog.ucl.ac.uk/~plewis/invert/nonlinear.htm)