KONU 5: ÇOK AMAÇLI KARAR VERME YÖNTEMLERİ – II

Önsel Tercih Bilgisinin Kullanıldığı Yöntemler (Hedef Programlama)

Doğrusal Programlama problemlerinde olduğu gibi belirli bir amaç fonksiyonunu en iyilemek yerine, amaç fonksiyonlarını ve kısıtları bir hedef gibi düşünüp, bu hedeflere ilişkin sapmaları ya da sapma değerlerini en küçükleyen bir yöntemdir. İnsan gücü planlaması, kaynak planlaması, akademik kaynak kullanımı, yerel yönetimlerin ekonomik planlaması, bütçe planlaması, hastanelerde kaynak kullanımı, finans, ulaştırma, öğrenci başarılarının kestirimi gibi alanlarda oldukça yaygın biçimde kullanılan çok amaçlı bir programlama yöntemidir. İlgilenilen birden fazla amaç fonksiyonuna aynı anda tatminkar çözüm bulunmaya çalışılır.

Model varsayımları:

- Oransallık
- Doğrusallık
- Toplanabilirlik
- Sınırlılık
- Amaçlara öncelik verilmesi
- Negatif olmama

Hedef Programlamanın Çeşitleri:

- Doğrusal Hedef Programlama
- Doğrusal Olmayan Hedef Programlama
- Tamsayılı Hedef Programlama
- Bulanık Hedef Programlama
- Stokastik Hedef Programlama

Hedef Programlamanın Matematiksel Modellemesi:

Amaç fonksiyonları kısıt olarak ele alınıp, amaç fonksiyonu yerine hedef değerlerden sapmaları minimum yapacak biçimde bir erişim fonksiyonu tanımlanır.

$$
\begin{aligned}
\text{max/ min } Z_1(\mathbf{X}) = \mathbf{c}_j\mathbf{X} = f_j(\mathbf{X}) \quad &, \quad j = 1,2,\ldots,l \\
g_i(\mathbf{X})\{\leq,\geq,=\}b_i \quad &, \quad i = 1,2,\ldots,m \\
\mathbf{X} \geq \mathbf{0} &
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlı bir çok amaçlı karar verme problemi

$$\min Z(\mathbf{X}) = \sum_k d_k^- + \sum_k d_k^+ \quad , \quad k = 1,2,\ldots,l+m$$
$$f_j(\mathbf{X}) + d_j^- + d_j^+ = b_j \quad , \quad j = 1,2,\ldots,l$$
$$g_i(\mathbf{X}) + d_i^- + d_i^+ = b_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0} \ , \ d_i^{\mp} \geq 0 \ , \ d_j^{\mp} \geq 0 \ , \ i = 1,2,\ldots,m \ , \ j = 1,2,\ldots,l$$

ile tanımlı bir hedef programlama modeline dönüştürülür.

	Erişim fonksiyonunda minimum yapılmak istenilen sapma değeri
$g_i(\mathbf{X}) \leq b_i$, $i = 1,2,\ldots,m$	d_i^+ (*i*. hedeften pozitif sapma)
$g_i(\mathbf{X}) \geq b_i$, $i = 1,2,\ldots,m$	d_i^- (*i*. hedeften nagatif sapma)
$g_i(\mathbf{X}) = b_i$, $i = 1,2,\ldots,m$	$d_i^- + d_i^+$

Hedef Programlama Çözüm Algoritması (Minimum Problem için):

Adım 1: Verilen program standart biçime dönüştürülüp, başlangıç simpleks tablosu oluşturulur. Bilinen simpleks tablosundaki tek amaç satırı yerine her bir amaç için ayrı bir satır açılır. İlk önceliğe sahip amaç fonksiyonu satırından (P_1 satırı) başlanır ve ikinci bir satıra geçilir.

Adım 2: P_1 öncelikli amaç satırındaki $Z_j - c_j$ değerleri kontrol edilir. Pozitif değerli $Z_j - c_j$ değerleri yoksa Adım 6'ya, aksi halde Adım 3'e geçilir.

Adım 3: En büyük pozitif $Z_j - c_j$ değerine sahip değişken temele alınır ve Adım 4' e geçilir.

Adım 4: Temelden çıkacak değişken için bilinen ölçüt kullanılır ve Adım 5' e geçilir.

Adım 5: Bilinen pivot işlemleri uygulanarak, yeni simpleks tablo oluşturulur ve Adım 2' ye geçilir.

Adım 6: Daha düşük öncelikli amaçların optimalliğinin denetlenmesi için Adım 7' ye geçilir.

Adım 7: Optimallik ölçütü denetlenir. Temel dışı değişkenlere ilişkin tüm $Z_j - c_j \leq 0$ ise, optimal çözüme ulaşılmıştır. Ancak düşük düzeyli bir öncelik satırında pozitif $Z_j - c_j$ değeri varsa, onun altındaki yüksek öncelik düzeyinde kalan $Z_j - c_j$ değeri negatif ise, $Z_j - c_j$ değeri pozitif olmasına rağmen temele alınmaz. Eğer bu değişken temele alınırsa daha öncelikli olan amaçlarda hedeflerden sapmalar ortaya çıkar. Dolayısıyla bundan kaçınmak gerekir.

Hedef Programlama, geliştirilen amaç fonksiyonu yapısına bağlı olarak sınıflandırılabilir.

i. Tek hedefli programlama

ii. Ağırlıklı çok hedefli programlama

iii. Öncelikli çok hedefli programlama

iv. Ağırlıklı-öncelikli çok hedefli programlama

i. Tek hedefli programlama

İlgilenilen problemin tek hedefi olduğundan, karar vericinin isteği bu hedefe ulaşmaktır. Tek hedefi içeren problemler, model kurulması ve çözümü bakımından en basit hedef programlama problemi olarak değerlendirilebilir.

Örnek:

Elektronik cihazlar üreten bir firma A ve B olmak üzere iki tür cihaz üretmektedir. Her iki ürüne olan talep fazla olduğu için üretilen ürünler satılabilmektedir. Bu iki ürün ile ilgili bilgiler aşağıdaki çizelgede sunulmuştur.

Ürün	Elektrik bağlantı süresi (sa)	Test süresi (sa)	Her bir ürün için elde edilen kazanç (TL)
A	4	2	100
B	2	2	150
Günlük süre (sa)	80	60	

Firma yöneticisi dönem sonunda günlük kazancının 5000 tL den fazla olmasını istiyor. Bu problemi hedef programlama problemi olarak ifade edip, simpleks algoritması ile çözünüz.

Çözüm:

Verilen problem bir d.p.p. problemi olarak

$$\begin{aligned} \max\ & Z = 100X_1 + 150X_2 \\ & 4X_1 + 2X_2 \le 80 \\ & 2X_1 + 2X_2 \le 60 \\ & X_1, X_2 \ge 0 \end{aligned}$$

biçiminde modellenir. Problemin en iyi çözümü $\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} 0 & 30 \end{bmatrix}$, $Z^* = 500$ dır. Firma yöneticisi kazancını maksimum yapmak yerine, yaptığı harcamaya ve ana parasına göre belli bir dönem sonra günlük kazancını 5000 TL yapmak istiyor. Buna göre oluşturulacak hedef programlama modeli

$$\begin{aligned} \min\ Z &= d_1^- \\ 4X_1 + 2X_2 &\le 80 \\ 2X_1 + 2X_2 &\le 60 \\ 100X_1 + 150X_2 + d_1^- - d_1^+ &= 5000 \\ X_1, X_2, d_1^-, d_1^+ &\ge 0 \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

$$\begin{aligned} \min\ Z &= d_1^- + 0X_3 + 0X_4 \\ 4X_1 + 2X_2 + X_3 &= 80 \\ 2X_1 + 2X_2 + X_4 &= 60 \\ 100X_1 + 150X_2 + d_1^- - d_1^+ &= 5000 \\ X_1, X_2, X_3, X_4, d_1^-, d_1^+ &\ge 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 100 & 150 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 80 \\ 60 \\ 5000 \end{bmatrix}$$

Tablo-I			0	0	0	0	1	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{d}_1^-$	$\mathbf{d}_1^+$	
0	X_3	80	4	2	1	0	0	0	
0	X_4	60	2	2	0	1	0	0	
1	d_1^-	5000	100	150	0	0	1	-1	
		$Z = 5000$	100	150	0	0	0	-1	≤ 0 olmalı

Tablo-II			0	0	0	0	1	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{d}_1^-$	$\mathbf{d}_1^+$	
0	X_3	20	2	0	1	-1	0	0	
0	X_2	30	1	1	0	1/2	0	0	
1	d_1^-	500	-50	0	0	-75	1	-1	
		$Z = 500$	-50	0	0	-75	0	-1	≤ 0 sağlandı

Tablo-II' de görüldüğü gibi en iyilik ölçütü sağlanmıştır. Optimal çözüm

$\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \end{bmatrix}$ olup, 500 br lik negatif sapma ile firma yöneticisi hedefine ulaşmıştır.