KONU 7: ÇOK AMAÇLI KARAR VERME YÖNTEMLERİ – III

Etkileşimli Yöntemler (STEP Yöntemi)

1971 yılında Benayoun, Montgolfier, Tergny ve Laritchev tarafından çok amaçlı doğrusal programlama problemlerinin çözüm yöntemi olarak sunulmuştur. Karar vericinin, amaç fonksiyonlarının göreli önemi hakkında yeterli bilgiye sahip olmadığı gibi durumlarda kolaylıkla kullanılabilmektedir. İteratif bir biçimde çözüm aranmaktadır. Ardı ardına yapılan yinelemeler sonucunda uzlaşık çözüme ulaşılır. STEP yönteminde uzlaşık çözüme amaç fonksiyonu sayısından daha az sayıda yineleme ile ulaşılır. Yöntem, en iyilik kavramının parametrik yorumuna dayanmaktadır. l amaç fonksiyonu sayısı, m yineleme sayısı olmak üzere ($m \leq l$) bu yöntem ile uzlaşık çözümün elde edilmesi iki aşamada olmaktadır. Bu aşamalar:

- **i.** Hesaplama aşaması
- **ii.** Karar aşaması

i. Hesaplama Aşaması

Öncelikli olarak alternatif çözümler tablosu oluşturulur. Kısıtlar ile birlikte her bir amaç fonksiyonu ayrı ayrı incelenir. Amaç fonksiyon türü minimizasyon olursa, maksimizasyon olacak biçimde yeniden düzenlenir. Her bir amaç fonksiyonu ayrı bir d.p.p. olarak çözümlenir.

$$\max f_i(\mathbf{X}) = \mathbf{c}_j \mathbf{X}_j \quad , \quad i = 1,2,\ldots,l \;,\; j = 1,2,\ldots,n$$
$$\left.\begin{array}{r} A\mathbf{X} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \end{array}\right\} \mathbf{X} \in S$$

$$\longrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\max f_1(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_{1j}\mathbf{X}_j \\
&\max f_2(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_{2j}\mathbf{X}_j \\
&\quad\vdots \\
&\max f_l(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_{lj}\mathbf{X}_j \\
&\quad \mathbf{X} \in S
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc}
\max f_1(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_{1j}\mathbf{X}_j & \max f_2(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_{2j}\mathbf{X}_j & \cdots & \max f_l(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_{lj}\mathbf{X}_j \\
\mathbf{X} \in S & \mathbf{X} \in S & & \mathbf{X} \in S \\
\mathbf{X}_1^*,\ f_1^* & \mathbf{X}_2^*,\ f_2^* & \cdots & \mathbf{X}_l^*,\ f_l^*
\end{array}$$

Elde edilen optimal çözümler (ideal çözümler) yardımıyla, **Alternatif Çözümler Tablosu** (**Ödemeler Matrisi**) oluşturulur.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & f_1 & f_2 & \cdots & f_j & \cdots & f_l \\
f_1 & f_1^* & f_{12} & \cdots & f_{1j} & \cdots & f_{1l} \\
f_2 & f_{21} & f_2^* & \cdots & f_{2j} & \cdots & f_{2l} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
f_j & f_{j1} & f_{j2} & \cdots & f_j^* & \cdots & f_{jl} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
f_l & f_{l1} & f_{l2} & \cdots & f_{lj} & \cdots & f_l^*
\end{array}
$$

Burada, f_{jl}, j. amaç fonksiyonunun en iyilenmesi sonucu elde edilen ideal çözümün l. amaç fonksiyonundaki değeridir. Ödemeler matrisi oluşturulduktan sonra bir model kurulur.

$$
\begin{aligned}
&\min \lambda \\
&\lambda \geq \left(f_j^* - f_j(\mathbf{X})\right)\Pi_j \quad , \quad j = 1,2,\ldots,l \\
&\mathbf{X} \in X^m \\
&\lambda \geq 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

λ : İdeal çözüme uzaklığın göreceli önem katsayısı

Π_j : j. amaç foksiyonuna karşılık gelen ağırlık, $j = 1,2,\ldots,l$

$f_j^* - f_j(\mathbf{X})$: İdeal çözüm ile en büyük fark , $j = 1,2,\ldots,l$

X^m : m. yinelemedeki kısıt kümesi

$$
\Pi_j = \frac{\alpha_j}{\sum_{j=1}^{l} \alpha_j} \quad , \quad \sum_{j=1}^{l} \Pi_j = 1 . \tag{2}
$$

$$\alpha_j = \begin{cases} \dfrac{f_j^* - f_j^{\min}}{f_j^*}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}}\right), & f_j^* > 0 \\ \dfrac{f_j^{\min} - f_j^*}{f_j^{\min}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}}\right), & f_j^* \le 0 \end{cases} \quad , \qquad j = 1,2,...,l \tag{3}$$

ii. Karar Aşaması

m. yinelemede bulunan çözümün amaç fonksiyon değeri ideal çözüm ile karşılaştırılmak üzere karar vericiye sunulur. Eğer, bazı amaçlar tatminkar, diğerleri değil ise, karar vericiden tatminkar olunan amaçtan tatminkar olunmayan amacın lehine fedakarlık yapılması istenir. Bu fedakarlık, Δ kadar tanımlanan bir büyüklük ölçüsü olacaktır. Daha sonra kısıt kümesi yeniden tanımlanarak (m+1). yinelemeye geçilir.

$$X^{m+1} = \begin{cases} X^m \\ f_i(\mathbf{X}) \ge f^m(\mathbf{X}) - \Delta z \quad , \quad i \ne j \\ f_j(\mathbf{X}) \ge f^m(\mathbf{X}) \end{cases} \tag{4}$$

Tatminkar olunan amacın Π ağırlık değeri sıfır olarak alınır ve (m+1). yinelemeye devam edilir.

STEP Yöntemi Algoritma Adımları

Adım 1: Ödemeler matrisi oluşturulur. Her amaç fonksiyonu için f_j^*, $j = 1,2,...,l$ hesaplanır.

Adım 2: Her amaç foksiyonu için Eşitlik (2) ve Eşitlik (3) kullanılarak, α_j ve Π_j, $j = 1,2,...,l$ hesaplanır.

Adım 3: Eşitlik (1) ile tanımlı model çözülür. Modelin çözümü sonucunda, X^m çözümü (m. yinelemedeki çözüm) elde edilir.

Adım 4: Karar vericiye X^m çözümü sonucunda her bir amaç fonksiyonunun aldığı değerler gösterilir. Burada iki durum söz konusudur. Karar verici süreci beğendiyse sürece son verilir. Karar verici süreci tatminkar bulmadıysa, yineleme sayısı artırılarak Adım 5' e geçilir.

Adım 5: Karar verici tatminkar olan f_j^*, $j=1,2,...,l$ amacından Δz sapmasını belirler ve Adım 6' ya geçilir. Eğer karar verici böyle bir Δz sapması belirleyemiyorsa bu yöntem ile model çözülemez. Farklı yöntemlerin denenmesi gerekir.

Adım 6: Probleme yeni bir uygun çözüm uzayı tanımlanarak, hesaplama aşamasına geçilir.

Not: Burada, "Adım1, Adım2, Adım3" hesaplama aşamaları olup, "Adım4, Adım5" karar aşamalarıdır.

Örnek:

$$\max Z_1 = X_1$$
$$\max Z_2 = X_1 + 4X_2$$
$$\left.\begin{array}{c} X_1 + 2X_2 \le 800 \\ X_1 + X_2 \le 600 \\ X_2 \le 300 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{array}\right\} X^0$$

biçiminde tanımlı çok amaçlı modele ilişkin uzlaşık çözümü STEP yöntemi ile elde ediniz.

Çözüm:

Her bir amaç fonksiyonu için ayrı ayrı çözüm yapılarak, optimal çözümler elde edilir.

$$\begin{array}{c} \max Z_1 = X_1 \\ \mathbf{X} \in X^0 \end{array} \qquad \mathbf{X}_1^* = \begin{bmatrix} 600 & 0 \end{bmatrix}, \; f_1^* = 600$$

$$\begin{array}{c} \max Z_2 = X_1 + 4X_2 \\ \mathbf{X} \in X^0 \end{array} \qquad \mathbf{X}_2^* = \begin{bmatrix} 200 & 300 \end{bmatrix}, \; f_2^* = 1400$$

Ödemeler Matrisi

	f_1	f_2
f_1	600	Z_{12} = 600
f_2	Z_{21} =200	1400

Hesaplama Aşaması

$f_1^* = 600 > 0$ olduğundan, $\alpha_1 = \dfrac{f_1^* - f_1^{\min}}{f_1^*}\left(\dfrac{1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}\right) = \dfrac{600-200}{600}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1^2+0^2}}\right) = 0.6667$.

$f_2^* = 1400 > 0$ olduğundan, $\alpha_2 = \dfrac{f_2^* - f_2^{\min}}{f_2^*}\left(\dfrac{1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}\right) = \dfrac{1400-600}{1400}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1^2+4^2}}\right) = 0.1386$.

$$\Pi_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{0.6667}{0.6667 + 0.1386} = 0.828$$

$$\Pi_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{0.1386}{0.6667 + 0.1386} = 0.172 \ , \quad (\Pi_2 = 1 - \Pi_1 = 0.172)$$

$$\left.\begin{array}{c} \min \lambda \\ \lambda \geq (600 - X_1)(0.828) \\ \lambda \geq \left(1400 - (X_1 + 4X_2)\right)(0.172) \\ \mathbf{X} \in X^0 \ , \ \lambda \geq 0 \end{array}\right\} X^1 \qquad \begin{array}{l} \mathbf{X}^* = [497.57 \quad 102.42] \\ f^* = [497.57 \quad 907.28] \\ \lambda^* = 84.7714 \end{array}$$

Elde edilen uzlaşık çözüm karar vericiye sunulur. Karar verici bu çözümü ideal çözüm vektörü olan $f^* = [600 \quad 1400]$ ile karşılaştırır. Karar verici bu çözümü tatminkar bulursa, elde edilen süreç tamamlanır. Çözüm, $f^* = [497.57 \quad 907.28]$ olarak değerlendirilir. Karar vericinin bu çözümü tatminkar bulmadığı durumda, hangi amaç fonksiyonundan fedakarlık yapacağını çözümleyiciye bildirir. Bu problem için 1. amaç fonksiyonu değeri olan 497.57' den, 2. amaç fonksiyonu lehine 15 br lik bir fedakarlık yaptığını kabul edelim. Bu durumda, 2. yineleme için yeniden kısıt kümesi (X^2) tanımlanır.

$$X^2 = \left\{\begin{array}{c} X^1 \\ f_1(\mathbf{X}) \geq 497.57 - 15 \\ f_2(\mathbf{X}) \geq 907.28 \end{array}\right.$$

Burada, 1. amaç fonksiyonundan fedakarlık yapıldığı için $\Pi_1 = 0$ olarak alınır. $\Pi_2 = 1$ dir.

$$\min \lambda$$
$$\lambda \geq \left(600 - X_1\right) \times 0$$
$$\lambda \geq \left(1400 - \left(X_1 + 4X_2\right)\right) \times 1$$
$$\mathbf{X} \in X^0 \ , \ \lambda \geq 0$$
$$X_1 \geq 482.57$$
$$X_1 + 4X_2 \geq 907.28$$

Ödünleşim Analizi

f_1 **den sapmalar**	f_1	f_2	$\mathbf{X}^*$	λ^*
$\Delta z_1 = 0$	497.57	907.28	[497.57 102.42]	492.71
$\Delta z_2 = 5$	492.57	922.28	[492.57 107.42]	477.71
$\Delta z_3 = 10$	487.57	937.28	[487.57 112.42]	462.71
$\Delta z_4 = 15$	482.57	952.28	[482.57 117.42]	447.71
$\Delta z_5 = 20$	477.57	967.28	[477.57 122.42]	432.71