2.2.2. Modifiye Euler Yöntemi(İkinci Mertebe Yöntem) İle Sayısal Çözüm

Euler yönteminde bir kez türev alma işlemi yapılmasına karşın Modifiye Euler yönteminde, iki kez türev alındığından bu yönteme, ikinci mertebe yöntem de denilmektedir.

Bu yöntemin adi türevli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümüne uygulanışı aşağıdaki algoritma ile verilebilir.

Örnek olarak başlangıç koşulu x_0, y_0 olan

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

şeklinde adi türevli diferansiyel denklemi Modifiye Euler yöntemi ile çözülsün. Burada adım aralığı Δx seçilir.

1) x_0 ve y_0 değerlerinden $(dy/dx)_0$ değeri hesaplanır.

2) Euler yöntemine göre,

$$y_1 = y_0 + \left[\frac{dy}{dx}\right]_0 \Delta x$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

değerleri hesaplanır.

3) İkinci işlemde hesaplanan x_1 ve y_1 değerlerinden yeni bir $(dy/dx)_1$ türevi hesaplanır.

4) 1. ve 3. işlemlerde hesaplanan türevlerden

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \frac{1}{2}\left[\left[\frac{dy}{dx}\right]_0 + \left[\frac{dy}{dx}\right]_1\right]$$

ortalama türevi bulunur.

5) 1. işlemde verilen x_0 ve y_0 değerinden Modifiye Euler yöntemine göre yeni x_1 ve y_1 değeri aşağıdaki gibi hesaplanır;

$$y_1 = y_0 + \left[\frac{d\bar{y}}{dx}\right]_0 \Delta x$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

Bu şekilde 1'den 5'e kadar işlemler tamamlandığında integrasyonda bir adım ilerlenmiş olur.İkinci adım için 5. işlemde hesaplanan değerler kullanılır ve 1. adımdan başlayarak, tüm adımlardaki hesaplamalar yinelenir.

Modifiye Euler yöntemi aşağıda bir örnek probleme uygulanmıştır.

Örnek 2.5 :

$$\frac{dy}{dx} = 3x + y^2$$

diferansiyel denklemini $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $\Delta x = 0.01$ koşullarında Modifiye Euler yöntemine göre 3 adım için çözünüz.

Çözüm :

1. Adım :

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_0 = 3x_0 + {y_0}^2 = (3)(0) + (1)^2 = 1$$

$$y_1 = y_0 + \left[\frac{dy}{dx}\right]_0 \Delta x = 1 + (1)(0.01) = 1.01$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x = 0 + 0.01 = 0.01$$

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_1 = 3x_1 + {y_1}^2 = (3)(0.01) + (1.01)^2 = 1.0501$$

$$\left[\frac{d\bar{y}}{dx}\right]_0 = \frac{1}{2}\left[\left[\frac{dy}{dx}\right]_0 + \left[\frac{dy}{dx}\right]_1\right] = 0.5\,(1 + 1.0501) = 1.025$$

$$\mathbf{y_1 = y_0 + \left[\frac{d\bar{y}}{dx}\right]_0 \Delta x = 1 + (1.025)(0.01) = 1.01} \quad *$$

$$\mathbf{x_1 = x_0 + \Delta x = 0 + 0.01 = 0.01} \quad *$$

2. Adım :

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_1 = 3x_1 + {y_1}^2 = (3)(0.01) + (1.01)^2 = 1.0501$$

$$y_2 = y_1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]_1 \Delta x = 1.01 + (1.0501)(0.01) = 1.02$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x = 0.01 + 0.01 = 0.02$$

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_2 = 3x_2 + y_2^2 = (3)(0.02) + (1.02)^2 = 1.1004$$

$$\left[\frac{d\bar{y}}{dx}\right]_1 = \frac{1}{2}\left[\left[\frac{dy}{dx}\right]_1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]_2\right] = 0.5\ (1.0501 + 1.1004) = 1.075$$

$$\mathbf{y_2 = y_1 + \left[\frac{d\bar{y}}{dx}\right]_1 \Delta x = 1.01 + (1.075)(0.01) = 1.02075} \quad *$$

$$\mathbf{x_2 = x_1 + \Delta x = 0.01 + 0.01 = 0.02} \quad *$$

3. Adım :

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_2 = 3x_2 + y_2^2 = (3)(0.02) + (1.02075)^2 = 1.102$$

$$y_3 = y_2 + \left[\frac{dy}{dx}\right]_2 \Delta x = 1.02075 + (1.102)(0.01) = 1.032$$

$$x_3 = x_2 + \Delta x = 0.02 + 0.01 = 0.03$$

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_3 = 3x_3 + y_3^2 = (3)(0.03) + (1.032)^2 = 1.155$$

$$\left[\frac{d\bar{y}}{dx}\right]_2 = \frac{1}{2}\left[\left[\frac{dy}{dx}\right]_2 + \left[\frac{dy}{dx}\right]_3\right] = 0.5\ (1.102 + 1.155) = 1.1285$$

$$\mathbf{y_3 = y_2 + \left[\frac{d\bar{y}}{dx}\right]_2 \Delta x = 1.02075 + (1.1285)(0.01) = 1.022} \quad *$$

$$\mathbf{x_3 = x_2 + \Delta x = 0.02 + 0.01 = 0.03} \quad *$$

BÖLÜM 3. DEĞİŞKEN KATSAYILI İKİNCİ MERTEBE ADİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SERİLERLE ÇÖZÜMÜ

3.1. Frobenius Yöntemi

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+xF(x)\frac{dy}{dx}+G(x)y=0 \tag{3.1}$$

$$F(x)=F_0+F_1x+F_2x^2+\dots \tag{3.2}$$
$$G(x)=G_0+G_1x+G_2x^2+\dots \tag{3.3}$$

olarak verilen değişken katsayılı ikinci mertebe lineer diferansiyel denklemin,

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+c} \qquad , \qquad (a_0\neq 0) \tag{3.4}$$

ile verilen seri biçiminde bir çözümü olsun. Buna göre (3.4) eşitliği (3.1)'i sağlamalıdır. (3.4) eşitliğinin birinci ve ikinci türevleri alınırsa;

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c)x^{n+c-1} \tag{3.5}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c-2} \tag{3.6}$$

(3.2-3.6) eşitlikleri (3.1)'de yerine konursa;

$$x^2\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c-2}\right]+x\,(F_0+F_1x+F_2x^2+..)\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c)x^{n+c-1}\right]$$

$$+(G_0+G_1x+G_2x^2+\dots)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+c}=0 \tag{3.7}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c}+(F_0+F_1x+F_2x^2+\dots)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c)x^{n+c}$$

$$+(G_0+G_1x+G_2x^2+\dots)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+c}=0 \tag{3.8}$$

(3.8) eşitliğinde x'in katsayıları sıfıra eşit olmalıdır. x'in en küçük üssü n=0 için c olacaktır.

$n = 0$ için $x^{n+c} = x^c$

En küçük üslü terimin katsayılarının sıfıra eşitlenmesi ile **İndis Eşitliği** bulunur.

x^c 'nin katsayısı : $a_0c(c-1) + F_0a_0c + G_0a_0 = 0$ (3.9)

x^{c+1}'in katsayısı : $a_1(c+1)c + F_0a_1(c+1) + F_1a_0c + G_0a_1 + G_1a_0 = 0$ (3.10)

x^{c+2}'nin katsayısı : $a_2(c+2)(c+1)+F_0a_2(c+2)+F_1a_1(c+1)+F_2a_0c+G_0a_2+G_1a_1+G_2a_0 = 0$ (3.11)

.

.

.

x^{n+c}'nin katsayısı: $a_n(n+c)(n+c-1) + F_0a_n(n+c) + F_1a_{n-1}(n+c-1)+ F_2a_{n-2}(n+c-2) + G_0a_n + G_1a_{n-1} + G_2a_{n-2} = 0$ (3.12)

(3.9) eşitliğinden,

$$a_0 [c(c-1) + F_0c + G_0] = 0 \tag{3.13}$$

a_0 sıfırdan farklı olacağından,

$$c(c-1) + F_0c + G_0 = 0 \tag{3.14}$$

$$c[(c-1) + F_0] + G_0 = 0 \quad \textbf{İndis Eşitliği} \tag{3.15}$$

olmalıdır. (3.15) eşitliği, c_1 ve c_2 gibi iki kökü olan ikinci derece cebirsel bir eşitliktir.

$$c^2 - c + F_0c + G_0 = 0 \tag{3.16}$$

$$c^2 + (F_0 - 1)c + G_0 = 0 \tag{3.17}$$

Bu eşitliği sağlayan c_1 ve c_2'nin değerine göre üç durum vardır. Diferansiyel denklemlerin Frobenius yöntemi ile çözümünde bu üç durum gözönünde bulundurulmalıdır.

1. Durum :

$c_1 \neq c_2$ ve $c_1 - c_2 = j$ olmak üzere, j tamsayı değilse değişken katsayılı ikinci mertebe lineer diferansiyel denklemin çözümü,

$$y = y_1 + y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+c_1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+c_2} \tag{3.18}$$

olarak verilir.

2. Durum :

$c_1 = c_2$ ve $c_1 - c_2 = j = 0$ ise genel çözüm,

$$y = \alpha\, u(x,c_1) + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial c}\right)_{c=c_1} \tag{3.19}$$

eşitliği ile verilir. α ve β birer sabittir.

3. Durum :

$c_1 \neq c_2$, $j \neq 0$ ve tamsayı ise genel çözüm,

$$y = A\, u(x,c_2) + B \frac{\partial}{\partial c} [(c-c_1)u(x,c)]_{c=c1} \tag{3.20}$$

şeklindedir. A ve B birer sabittir.

Not : (3.4) eşitliğindeki c indis eşitliğinden bulunur. c ve a_n'in bulunması, aşağıda örneklerle açıklanmıştır.

Örnek 3.1 : (Frobenius yöntemi - 1. durum)

$$4x\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + y = 0$$

diferansiyel denklemini Frobenius yöntemine göre çözünüz.

Çözüm :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+c}$$

biçiminde verilen seri, yukarıda verilen diferansiyel denklemi sağlamalıdır. Buna göre;

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+c) x^{n+c-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+c)(n+c-1) x^{n+c-2}$$

ifadeleri diferansiyel eşitlikte yerine konursa;

$$4x\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c-2}+6\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+c)x^{n+c-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+c}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[4a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c-1}+6a_n(n+c)x^{n+c-1}+a_nx^{n+c}\right]=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{a_n(2n+2c)[2(n+c-1)+3]x^{n+c-1}+a_nx^{n+c}\right\}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(2n+2c)(2n+2c+1)\,x^{n+c-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^{n+c} \tag{1}$$

olur. Bu ifadede a_n ve x sıfır olamayacağından x'in katsayıları sıfıra eşittir. Burada x'in en küçük üssü (n=0 için) **c-1** 'dir. Bu şekilde oluşturulacak indis eşitliğinden c değeri bulunur.

$n=0$ için $a_0\,2c\,(2c+1)\,x^{c-1}=0$

x^{c-1} ve a_0 sıfır olamayacağından **indis eşitliği**;

$$\mathbf{c(2c+1)=0 \;\Rightarrow\; c_1=0\;,\; c_2=-1/2} \tag{2}$$

bulunur. $j=c_1-c_2=0-(-1/2)=1/2$ 'dir. Bu diferansiyel denklem, Frobenius yöntemi **1. duruma** göre çözülmelidir. Genel çözüm,

$$y=y_1+y_2=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+c_1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+c_2} \tag{3}$$

şeklindedir.

<u>a_n katsayısının bulunması :</u> (1) eşitliğinden;

n=0	için x^{c-1} 'in katsayısı,	$a_0 2c(2c+1)=0$, **(İndis eşitliği)**	
n=1;0	için x^{c} 'in katsayısı,	$a_1(2c+2)(2c+3)+a_0=0$	(4)
n=2;1	için x^{c+1}'in katsayısı,	$a_2(2c+4)(2c+5)+a_1=0$	(5)
n=3;2	için x^{c+2}'in katsayısı,	$a_3(2c+6)(2c+7)+a_2=0$	(6)

.
.
.

n=n;n-1 için x^{n+c-1}'in katsayısı, $a_n(2n+2c)(2n+2c+1)+a_{n-1}=0$ (7)