$$y = x^{(1-1)/2} \cdot e^{-0x^r/r}\left[c_1 Z_k\left(\frac{\sqrt{|-2|}}{1}x^1\right) + c_2 Z_{-k}\left(\frac{\sqrt{|-2|}}{1}x^1\right)\right] \tag{b3}$$

$$y = C_1 Z_k(\sqrt{2}\,x) + C_2 Z_{-k}(\sqrt{2}\,x)$$

elde edilir. (3.34)'ten denklemin mertebesi k hesaplanır ve $\sqrt{d}$ s'/nin aldığı değere göre Z belirlenir.

$$k = \frac{1}{1}\sqrt{\left(\frac{1-1}{2}\right)^2 - 0} = 0$$

$$\sqrt{d}/s = \sqrt{-2}/1 = i\sqrt{2}$$

Buna göre $Z_k = I_k$ ve $Z_{-k} = K_k$ olacağından genel çözüm,

$$y = C_1 I_0(\sqrt{2}\,x) + C_2 K_0(\sqrt{2}\,x) \tag{b4}$$

olarak bulunur.

c) $$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0 \tag{c1}$$

(c1) ve (3.32)'de verilen genel diferansiyel denklemde her bir terimin katsayısı birbirine eşitlenirse;

$$x = x(a + 2bx^r)$$

$$1 = (a + 2bx^r) \qquad a=1\ ,\ b=0$$

$$x^2 - \frac{1}{4} = c + dx^{2s} - b(1-a-r)x^r + b^2x^{2r}\ ,\ b=0\ \ c=-1/4\ ,\ d=1\ ,\ s=1$$

$$y = C_1 Z_k(x) + C_2 Z_{-k}(x) \tag{c2}$$

çözümü elde edilir. Denklemin mertebesi (k) ve $\sqrt{d}/s$ ise;

$$k = \frac{1}{1}\sqrt{\left(\frac{1-1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{2} \qquad , \qquad \sqrt{d}/s = \sqrt{1}/1 = 1$$

olduğundan $\mathbf{Z_k = J_k}$ ve $\mathbf{Z_{-k} = J_{-k}}$ yazılır. 1/2. mertebeden Bessel fonksiyonlarının özelikleri gözönünde bulundurulursa genel çözüm;

$$y = C_1 J_{1/2}(x) + C_2 J_{-1/2}(x) \tag{c3}$$

$$y = C_1\sqrt{2/(\pi x)}\,\sin x + C_2\sqrt{2/(\pi x)}\cos x \tag{c4}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.7 : Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin çözümlerini Bessel fonksiyonları yardımı ile doğrudan yazınız.

a) $x^2y''+xy'+(x^2-¼)y=0$
b) $x^2y''+xy'-(x^2+¼)y=0$
c) $x^2y''+xy'+4x^2y=0$
d) $x^2y''+xy'-4x^2y=0$
e) $x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0$
f) $x^2y''+xy'-(x^2+1)y=0$

Çözüm :
a) Verilen diferansiyel denklem (3.21) eşitliği ile verilen Bessel fonksiyonu ile karşılaştırılırsa;

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-\frac{1}{4})y=0 \qquad (a1)$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-k^2)y=0$$, **(Bessel Denklemi)**

$k=1/2$ olduğuna göre genel çözüm;

$$y = AJ_k(x)+BJ_{-k}(x)$$
$$y = AJ_{1/2}(x)+BJ_{-1/2}(x)$$
$$y = A\sqrt{2/(\pi x)}\,\sin x + B\sqrt{2/(\pi x)}\cos x \qquad (a2)$$

bulunur.

b) $$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-(x^2+\frac{1}{4})y=0 \qquad (b1)$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-(x^2+k^2)y=0$$, **(Modifiye Bessel Denklemi)**

Yukarıdan da anlaşıldığı gibi (b1) denklemi **Modifiye Bessel Denklemidir.** Buradan $k=1/2$ olarak hesaplanır. Buna göre genel çözüm,

$$y = AI_k(x) + BI_{-k}(x)$$
$$y = AI_{1/2}(x) + BI_{-1/2}(x)$$

şeklindedir ve Bessel fonksiyonlarının özeliklerinden,

$$y = A\sqrt{2/(\pi x)}\,\sinh x + B\sqrt{2/(\pi x)}\cosh x \qquad (b2)$$

bulunur.

c) $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x \dfrac{dy}{dx} + \mathbf{4x^2}\, y = 0$ (c1)

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + [(\mathbf{2x})^2 - \mathbf{0}^2]y = 0 \qquad \text{(c2)}$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - k^2)y = 0$$, **(Bessel Denklemi)**

k=0 olduğundan genel çözüm,

$$y = A\, J_k(x) + B\, Y_k(x)$$
$$y = A\, J_0(2x) + B\, Y_0(2x) \qquad \text{(c3)}$$

bulunur.

d) $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x \dfrac{dy}{dx} - \mathbf{4x^2}\, y = 0$ (d1)

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - [(\mathbf{2x})^2 + \mathbf{0}^2]y = 0 \qquad \text{(d2)}$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + k^2)y = 0$$, **(Modifiye Bessel Denklemi)**

k=0'dır ve genel çözüm;

$$y = A\, I_k(x) + B\, K_k(x)$$
$$y = A\, I_0(2x) + B\, K_0(2x) \qquad \text{(d3)}$$

olarak elde edilir.

e) $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x \dfrac{dy}{dx} + [\mathbf{x^2} - \mathbf{1}]y = 0$ (e1)

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - k^2)y = 0$$, **(Bessel Denklemi)**

k=1 (tamsayı) olduğundan genel çözüm;

$$y = A\, J_k(x) + B\, Y_k(x)$$
$$y = A\, J_1(2x) + B\, Y_1(2x) \qquad \text{(e2)}$$

şeklindedir.

f) $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - [x^2+1]y = 0$ (f1)

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (x^2+k^2)y = 0$$, **(Modifiye Bessel Denklemi)**

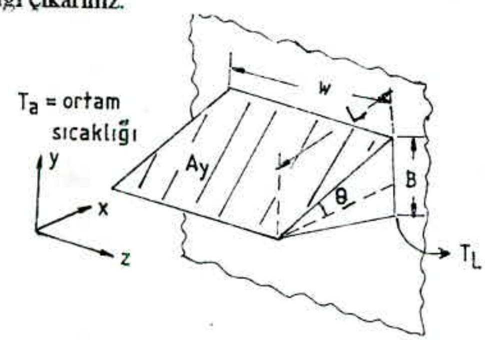
k=1 olduğundan genel çözüm,

$$y = A\,I_k(x) + B\,K_k(x)$$
$$y = A\,I_1(2x) + B\,K_1(2x) \quad \text{(f2)}$$

bulunur.

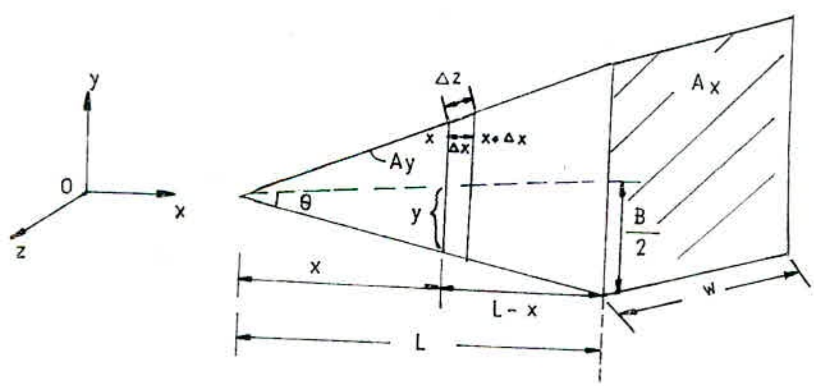
Not : J_k, k'ıncı mertebe birinci tür Bessel fonksiyonu; Y_k, k'ıncı mertebe ikinci tür Bessel fonksiyonu; I_k, k'ıncı mertebe birinci tür Modifiye Bessel fonksiyonu; K_k, k'ıncı mertebe ikinci tür Modifiye Bessel fonksiyonu olarak daha önce tanımlanmıştır.

Örnek 3.8 : Kalınlığı B uzunluğu L olan bakırdan yapılmış kanatçığın şekli aşağıdaki gibidir. Kanatçıktaki sıcaklık T=T(x) yalnızca x yönünde değişmektedir. Kanatçıktaki sıcaklık profilini veren eşitliği çıkarınız.



T_a=100°C
T_l=200°C
h=2 J/m^{2}h°C
k=220 J/m h°C
cosθ=1
B=1/12 m
L=1 m

Çözüm :



Δx kalınlığındaki hacim elemanında enerji denkliği yazılırsa,

[Giriş Hızı] - [Çıkış Hızı] + [Üretim Hızı] = [Birikim Hızı]

Sistemde enerji üretimi ve enerji birikimi yoktur.

$$qA_x\big|_x - qA_x\big|_{x+\Delta x} - hA_y(T - T_a) = 0 \tag{1}$$

$A_x = w2y$ ve $A_y = 2w\Delta z$ yazılabilir. y ve Δz uzunlukları;

$$\tan\theta = \frac{B/2}{L} = \frac{y}{x} \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{xB}{2L} \tag{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\Delta x}{\Delta z} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta z = \frac{\Delta x}{\cos\theta} \tag{3}$$

bulunur. Böylece;

$$A_x = xBw/L \tag{4}$$
$$A_y = 2w\,\Delta x/\cos\theta \tag{5}$$

olur. Bunlar (1) ile verilen enerji denkliğinde yerine konursa,

$$\left[-k\frac{xBw}{L}\cdot\frac{dT}{dx}\right]\Bigg|_x - \left[-k\frac{xBw}{L}\cdot\frac{dT}{dx}\right]\Bigg|_{x+\Delta x} - \frac{h2w\Delta x}{\cos\theta}(T - T_a) = 0$$

elde edilir. Her iki taraf Δx ile bölünür ve $\Delta x \to 0$ için limiti alınırsa;

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[-k\frac{xBw}{L}\cdot\frac{dT}{dx}\right]\Big|_x - \left[-k\frac{xBw}{L}\cdot\frac{dT}{dx}\right]\Big|_{x+\Delta x}}{\Delta x} - \frac{h2w}{\cos\theta}(T - T_a) = 0$$

$$k\frac{Bw}{L}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dT}{dx}\right) - \frac{2hw}{\cos\theta}(T - T_a) = 0$$

$$x\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{dT}{dx} - \frac{2hL}{Bk\cos\theta}(T - T_a) = 0 \tag{6}$$

bulunur. $y = T - T_a$ dönüşümü yapılır, $\alpha = 2hL/Bk\cos\theta$ yazılır ve (6) eşitliğinin her iki tarafı x ile çarpılırsa,

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - \alpha xy = 0 \tag{7}$$

Modifiye Bessel Denklemi elde edilir. Bu denklemin genelleştirilmiş Bessel denklemi ile çözümünden a=1, b=0, c=0, d=-α ve s=1/2 bulunur. Denklemin mertebesi ise k=0 ve $\sqrt{d/s} = 2i\sqrt{\alpha}$ olarak hesaplanır. Buna göre genel çözüm,

$$y = T\text{-}T_a = C_1 I_0(2\sqrt{\alpha x}) + C_2 K_0(2\sqrt{\alpha x})$$
$$y = T\text{-}T_a = C_1 I_0(0.934\sqrt{x}) + C_2 K_0(0.934\sqrt{x}) \tag{8}$$

bulunur. C_1 ve C_2 sabitleri sınır koşulları yardımıyla belirlenebilir.

Sınır Koşulu 1 : x=0 iken $K_0(0) \to \infty$ ve $I_0(0)=1$
Sınır Koşulu 2 : x=L=1 iken T=200°F, T_a=100°F

Birinci sınır koşulundan C_2=0'dır. Böylece (8) eşitliğinden,

$$T\text{-}T_a = C_1 I_0(0.934\sqrt{x}) \tag{9}$$

elde edilir. İkinci sınır koşulundan ise

$$200\text{-}100 = C_1 I_0(0.934)$$

yazılır.Bessel fonksiyonlarının sayısal değerlerini veren çizelgelerden $I_0(0.934)$ =1.230 olarak okunur ve C_1 =81.2 hesaplanır. Böylece genel çözüm;

$$T = T_a + 81.2\, I_0(0.934\sqrt{x})$$
$$T = 100 + 81.2\, I_0(0.934\sqrt{x})$$

bulunur.