11 Katı Cismin Yuvarlanma Hareketi

a) Vektörel Çarpım ve Tork
b) Açısal Momentum
c) Dönen Cismin Açısal Momentumu
d) Jiroskop ve Topaç ın harekeri

GİRİŞ

Bu bölümün ana konusu dönme kinematiğinde önemli olan açısal momentumdur. Çizgisel momentumun korunumunda olduğu gibi açısal momentum korunumu fiziğin temel yasalarından biridir. Bu durum sisteme dışarıdan bir tork/dönme momenti uygulanmadığında geçerlidir. Açısal momentumun korunumu relativistik ve kuantum sistemlerinde de geçerlidir.

Vektör çarpımı ve tork

Açısal momentum ile ilgileniyorsa vektörlerin vektörel çarpımları önem kazanmaktadır. Burada önceki bölümde anlatılmış olan dönme momentini kullanarak vektörel çarpım anlatılacaktır. r uzaklığındaki bir cisme F kuvvetinin etkidiğini kabul edelim. Cismi etki eden dönme momenti $r F \sin \theta$ buradaki θ açısı r ve F vektörleri arasındaki açıdır. Burada dönme ekseni r ve F vektörleri tarafından belirlenir.

Tork vektörü τ, r ve F vektörlerine bağlıdır. r ve F vektörlerinin vektörel çarpımı aşağıdaki gibidir:

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Vektör çarpımı ve tork

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Vektör çarpımının matematiksel gösterimi şu şekildedir. A ve B gibi iki vektör verilsin bu iki vektörün vektörel çarpımı A$\times$B ile gösterilir ve C gibi üçüncü bir vektör elde edilir. Büyüklüğü *AB sin*θ*, şeklindedir buradaki* θ *A ve B vektörleri arasındaki açıdır.*

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$C \equiv AB \sin \theta$$

Vektör çarpımı ve Tork

Eğer vektörlerin yeri değiştirilecek olursa eksi işaretinin konulması gerekir. Çarpma işlemi sağ el kuralına göre yapılabilir.

2. A vektörü B vektörüne paralel ise B (θ=0° veya 180°), $A \times B = 0$; vektörün kendisi ile vektörel çarpımıda $A \times A = 0$.

3. A vektörü B vektörüne dik ise $|A \times B| = AB$.

4. Vektörel çarpımın toplama üzerine dağılım özelliği : $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ (11.5)

5. Vektörel çarpımın türevi

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

Vektörrel çarpım

xy düzleminde bulunan iki vektör $\mathbf{A}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ ve $\mathbf{B}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ olarak verilmektedir. $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm :

$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(2\mathbf{i}+3\mathbf{j})\times(-\mathbf{i}+2\mathbf{j})=2\mathbf{i}\times(-\mathbf{i})+2\mathbf{i}\times2\mathbf{j}+3\mathbf{j}\times(-\mathbf{i})+3\mathbf{j}\times2\mathbf{j}=0+4\mathbf{k}+3\mathbf{k}+0=7\mathbf{k}$

$\mathbf{B}\times\mathbf{A}=(-\mathbf{i}+2\mathbf{j})\times(2\mathbf{i}+3\mathbf{j})=-\mathbf{i}\times2\mathbf{i}+2\mathbf{j}\times2\mathbf{i}+(-\mathbf{i})\times3\mathbf{j}+2\mathbf{j}\times3\mathbf{j}=0-4\mathbf{k}-3\mathbf{k}+0=-7\mathbf{k}$

Görüldüğü gibi

$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ dir.

Anlık açısal momentum

$$\mathbf{r} \times \sum \mathbf{F} = \sum \boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

$$\sum \boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p}$$

$$\sum \boldsymbol{\tau} = \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{dt}$$

Bir orijine göre bir parçacığın anlık açısal momentumu L, parçacığın anlık r uzaklığının anlık çizgisel momentumu P ile vektörel çarpımına eşittir.:

L=r×P

Katı Cismin Yuvarlanma Hareketi

10 kg kütleli bir silindir, pürüzlü bir yüzey üzerinde kaymadan yuvarlanmaktadır. Silindirin kütle merkezi 10 m/s lik hıza ulaştığında,

(a) kütle merkezinin öteleme kinetik enerjisini,

(b) kütle merkezine göre dönme kinetik enerjisini,

(c) toplam kinetik enerjiyi tayin ediniz.

(a) $K_{öteleme}=(1/2)mv^2=(1/2)\times 10\times(10\ m/s)^2=500$ Joule

$K_{dönme}=(1/2)Iw^2 = (1/2)I(v/r)^2=(1/2)(1/2)(10\ kg)(10\ m/s)2=250$ Joule

$K_{toplam}=K_{öteleme}+K_{dönme}=500+250$ Joule = 750 Joule

Katı Cismin Yuvarlanma Hareketi

İçi dolu bir kürenin yarıçapı 0.2 m ve kütlesi 150 kg dır. Bu küreyi yatay bir düzlem üzerinde 50 rad/s lik açısal hızla yuvarlayabilmek için ne kadar iş yapmak gerekir? (Kürenin durgun halden harekete başladığını ve kaymadan yuvarlandığını kabul ediniz.)

Kürenin enerjisindeki değişim üzerine yapılan işi gösterir:

$W=\Delta K=K_{sonra}-K_{önce}=(K_{öteleme}+K_{dönme})_{sonra}-(K_{öteleme}+K_{dönme})_{önce}$

Kürenin eylemsizlik momenti

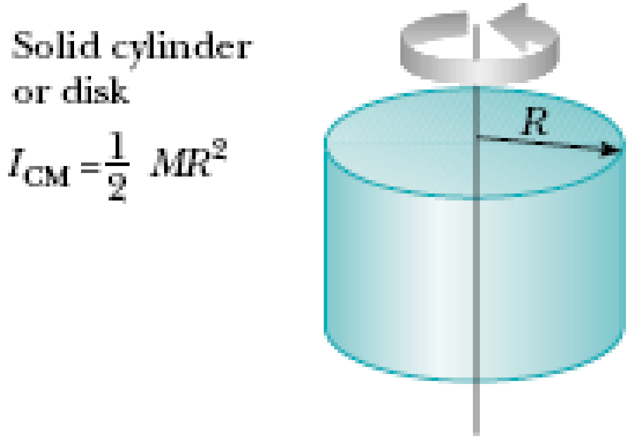
$I=(2/5)mr^2=(2/5)\times(150\text{ kg})\times(0.2\text{ m})^2=2.4\text{ kg m}^2$

Kürenin dönmesinden dolayı oluşan kinetik enerjisi

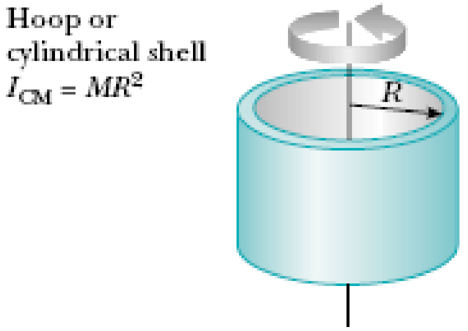
$K_{dönme}=(1/2)Iw^2= (0.5)\times(2.4\text{ kg m}^2)\times(50\text{ rad/s})^2=3000\text{ Joule}$

Katı Cismin Yuvarlanma Hareketi

(a) Bir eğik düzlem üzerinde, aşağıya doğru yuvarlanan içi dolu düzgün bir diskin kütle merkezinin ivmesini bulunuz ve bunu düzgün bir halkanın ivmesiyle karşılaştırınız, (b) Diskin sadece dönme hareketi yapması için sürtünme katsayısının en küçük değeri ne olmalıdır?



İçi dolu düzgün bir disk ve düzgün bir halka, h yüksekliğine sahip pürüzlü bir eğik düzlemin tepesinde yan yana tutulmaktadır. Bunlar serbest bırakılırsa ve kaymadan yuvarlanmalarına izin verilirse, alt uca ulaştıklarındaki hızlarını tayin ediniz. Alt uca bunların hangisi daha önce ulaşır?



Katı Cismin Yuvarlanma Hareketi

0.4 kg kütleli, 1.6×10^{2} kg.m^{2} eylemsizlik momentine sahip 0.20 m yarıçapında bir bowling topu düşünün. Bu top, kanalı içinde 4.0 m/s lik çizgisel hızla kaymadan yuvarlanırsa toplam kinetik enerjisi ne olur?

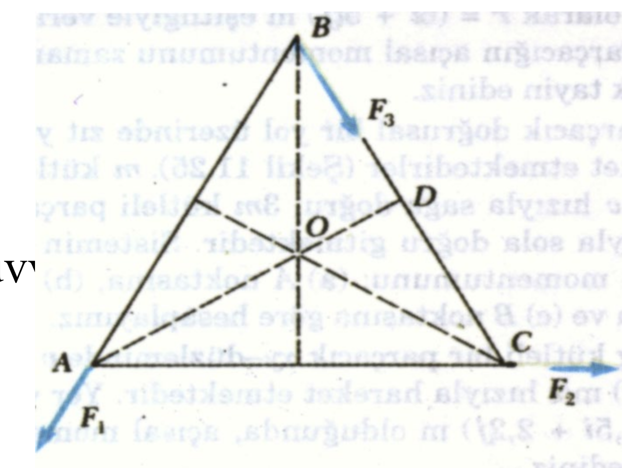
Her birinin kütleleri M ve yarıçapları R olan içi dolu bir küre ve içi dolu bir silindir, zemine göre v hızıyla hareket etmektedirler. Bunların kinetik enerjilerinin oranını bulunuz.

Vektörel Çarpım ve Tork

A ve B gibi herhangi iki vektörün vektörel çarpımı için (11.14) eşitliğini gerçekleyiniz ve vektörel çarpımın, aşağıda gösterildiği gibi, determinant şeklinde yazılabileceğini gösteriniz;

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

F_1 ve F_2 gibi iki kuvvet, Şekil 11.23 de gösterildiği gibi, eşkenar bir üçgenin iki kenarı boyunca etki etmektedir. B noktasına BC boyunca uygulandığında, üçgenin kenar orta dikmelerinin kesiştiği O noktasına göre net dönme momentinin sıfır olmasını sağlayan F_3 kuvv noktasına değil de, BC üzerindeki başka herhangi bir noktaya uygulansaydı, net dönme momenti değişirmiydi?



Şekil 11.23 (Problem 13)

Vektörel Çarpım ve Tork

Bir $F = 2i + 3j$ (newton birimli) kuvveti, z koordinat ekseni boyunca uzanan sabit bir eksen etrafında dönebilen bir risme etki etmektedir. Kuvvet $r = 4i + 5j + 0k$ (metre cinsinden) noktasına uygulanırsa, (a) z-eksenine göre net dönme momentinin büyüklüğünü, (b) T dönme momenti vektörünün doğrultusunu bulunuz.

Bir Parçacığın Açısal Momentumu

4 kg lık bir kütle, makaradan geçen hafif bir ipin ucuna bağlanmıştır (Şekil 10. 18). Makara, 8 cm yançaplı ve 2 kg kütleli içi dolu bir silindir olarak alınabilir, (a) O noktasına göre sistem üzerine etki eden net dönme mometi nedir? (b) 4 kg lık kütle bir v hızına sahip olduğunda, makara CO = v/R Hk bir açısal hıza sahip olmaktadır. Sistemin O noktasına göre toplam açısal momentumunu tayin ediniz, (c) T = dLldt ifadesini ve (b) de bulduğunuz sonucu kullanarak 4 kg lık kütlenin ivmesini hesaplayınız.

EK PROBLEMLER

(a) Dünya'nın Güneş etrafında yıllık hareketini yaptığı yörüngesindeki kinetik enerjisini hesaplayınız, (b) Dünyanın kendi ekseni etrafındaki günlük dönme hareketinin kinetik enerjisini hesaplayınız. (c)$K_{yörünge}/K_{dönme}$ oranını bulunuz.

2 m yarıçaplı ve 30 kg kütleli içi dolu ince silindir şeklinde bir döner masa, 4/r rad/s lik bir ilk açısal hızla yatay bir düzlem içinde dönmektedir. Hareket sürtünmesizdir. 0.25 kg kütleli küçük bir çamur topağı masaya düşmüş ve dönme ekseninden 1.8 m uzaklıktaki bir noktaya yapışmıştır, (a) Çamur topağı ve masanın son açısal hızını bulunuz. Çamur topağını noktasal kütle olarak alınız, (b) Bu çarpışmada mekanik enerji korunur mu? Açıklayınız ve cevabınızı sayısal sonuçlarla destekleyiniz.