

FİZ433 FİZİKTE BİLGİSAYAR UYGULAMALARI
(DERS NOTLARI)

Hazırlayan:

Prof.Dr. Orhan ÇAKIR

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü

Ankara, 2017

İÇİNDEKİLER

1. LİNEER OLMAYAN DENKLEMLERİN KÖKLERİNİN BULUNMASI I/II
2. LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜLMESİ I/II
3. UYGUN EĞRİNİN BULUNMASI VE INTERPOLASYON I/II
4. SAYISAL İNTEGRAL HESAPLARI I/II
- 5. DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ I/II**
6. BENZETİM I/II
7. FİZİKTE SEMBOLİK HESAPLAMA I/II

EKLER

KAYNAKLAR

KONU 9

DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ I

Bir veya birkaç türev içeren denklemlere diferensiyel denklem denir. Fizik ve mühendislik alanlarında çoğunlukla diferensiyel denklemler karşımıza çıkar. Gerçekte birçok fen yasası diferensiyel denklemlerle ifade edilir. Diferensiyel denklemler, fiziksel durumlarda bir değişkenin bir başka değişkenle ilgili değişimini tanımlar. Diferensiyel denklemleri içeren örnek fizik problemleri; Kütle-yay sisteminde yerdeğiştirme, direnç-indüktör-kondansatör (RLC) devresinde akım veya gerilim, kimyasal reaksiyonların oranı, uzay ve zamanda cismin hareketi, elektrik veya magnetik alanlar altında yüklü cisim hareketi, radyoaktif maddelerin bozunumu, vb. hesapları sayılabilir.

Diferensiyel denklemler bağımsız değişkenin sayısına göre, türevlerin çeşidine ve mertebesine göre sınıflandırılır. Bilinmeyen bir fonksiyonun sadece tek bağımsız değişkene bağlı olan diferensiyel denkleme adi diferensiyel denklem denir. Adi diferensiyel denkleme örnek olarak;

$$\frac{dy}{dx} = 3x + 1$$

Burada x bağımsız değişken ve y bağımlı değişkendir. Bir başka örnek ise m kütlelerinin hareketini F kuvveti etkisi altında ivmelenmeyi anlatan adi diferensiyel denklem;

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

Burada v cismin hızını ve ivme ise hızın zamanla değişimini temsil etmektedir. Bu denklemde bağımlı değişken hız (v) ve bağımsız değişken zamandır (t). Benzer şekilde bir paraşütçünün hızını zamanın fonksiyonu olarak ifade eden diferensiyel denklem

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{s}{m}v$$

şeklindedir. Burada g yerçekimi ivmesi, m paraşütçünün kütlesi, s ise sürüklenme katsayısıdır. Bu diferensiyel denklemin analitik çözümü $v(t)=gm(1-e^{-st/m})/s$ ile verilir, sayısal çözümü ise $v_{i+1}=v_i+(g-sv_i/m)\Delta t$ ile verilir.

Kimi diferensiyel denklem ise birden fazla bağımsız değişken içeren diferensiyel denklemdir. Örnek olarak;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = C$$

Bu denklemde bağımlı değişken f , bağımsız değişkenler x ve y 'dir, ve C de bir sabittir. (5.3) denklemi $\partial^2 f / \partial x^2$ ve $\partial^2 f / \partial y^2$ terimlerini içerdiğinden ikinci mertebeden kısmi türevli diferensiyel denklemdir.

Diferensiyel denklemler ayrıca türevlerin mertebesine göre sınıflandırılabilir. Birinci mertebeden diferensiyel denklem sadece değişkenin birinci türevleri içerir. Bundan dolayı (5.1) denklemi birinci mertebeden diferensiyel denklemdir. İkinci mertebeden diferensiyel denklem ise değişkenin ikinci mertebeden türevlerini içerir. Örnek olarak kütle yay sistemini hareketini ifade eden diferensiyel denklem;

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + s \frac{dx}{dt} + kx = F$$

Burada x , m kütleinin t zamanındaki yer değiştirmesi, s sönüm katsayısı, k yay sabiti ve F uygulanan kuvvet fonksiyonudur. (5.4) denklemi $d^2 x / dt^2$ terimini içerdiğinden ikinci mertebeden diferensiyel denklemdir. n 'inci mertebeden türev içeren denkleme n 'inci mertebeden diferensiyel denklem denir.

Lineer olmayan diferensiyel denklemlere bir fiziksel örnek, boyu l ve kütlesi m olan bir sarkacın hareketini tanımlayan denklemdir,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

burada θ sarkacın açısal yerdeğişmesini gösterir. Bu diferensiyel denklemin sayısal çözümü bulunabilir. Ancak, analitik çözümlerini elde etmek için küçük salınımlar yaklaşıklığı kullanılmalıdır. Bu durumda $\sin\theta \approx \theta$ yazılır ve diferensiyel denklem lineer hale gelir böylece açısal yerdeğişme için çözümler $A\sin\omega t + B\cos\omega t$ olarak bulunabilir. Burada açısal frekans $\omega^2 = g/l$ olarak tanımlanmıştır ve periyot genlikten bağımsız olur.

Yüksek mertebeden diferensiyel denklemler genellikle yeni değişkenler tanımlanarak birinci mertebeden diferensiyel denklemlere indirgenebilir. Böylece n 'inci mertebeden diferensiyel denklem $n-1$ tane değişken tanımlanarak n 'inci mertebeden diferensiyel denkleme karşılık gelen denklem sistemine indirgenebilir. Genel olarak böyle bir sistem

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Yazılabilir. Burada x 'in başlangıç değerinde n başlangıç koşulunun bilinmesi gerekir. Örnek olarak ikinci mertebeden diferensiyel denklemi ele alalım.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ky$$

Burada k bilinmeyen bir sabittir. $z = dy/dx$ şeklinde yeni bir değişken tanımlayıp denklemi tekrar yazalım.

$$\frac{dz}{dx} = ky$$

$$\frac{dy}{dx} = z$$

Yüksek mertebeden diferensiyel denklem, birinci mertebeden diferensiyel denklem serisine indirgenebildiğinden, burada birinci mertebe diferensiyel denklemlerin çözümü üzerinde duracağız.

Analitik çözümü yapılabilen diferensiyel denklemlerin sayısı sınırlıdır. Sayısal çözümler oldukça kolaydır ve kapsamlı matematik gerektirmez. Bu yöntemler bağımlı değişken $y(x)$ 'in tahmin edilmesinde, bağımsız değişken x 'in farklı değerleri için çözümü elde eder.

Fen ve mühendislik problemlerinde bulunan adi diferensiyel denklemler üç farklı çeşitte sınıflandırılabilir: i) başlangıç değer problemleri, ii) sınır değer problemleri, iii) özdeğer problemleri.

Başlangıç değer problemleri: Başlangıç değer problemi iki kısımdan oluşur; $y'(x) = f(x, y)$ diferensiyel denklemi ($y(x)$ ile $y'(x)$ arasındaki ilişkiyi verir) ve $y(x_0) = y_0$ başlangıç koşulu. Başlangıç değer problemine örnek olarak kütle-yay sistemi hareketini tanımlayan diferensiyel denklem;

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + s \frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad (8)$$

Burada x , m kütleinin t zamanındaki yer değiştirmesi, s sönüm katsayısı, k yay sabiti ve $F(t)$ zamana bağlı uygulanan kuvvet fonksiyonudur. Verilen başlangıç koşulları;

$$t = 0, \text{ da } x = 0 \text{ ve } \frac{dx}{dt} = 0$$

olarak yazılabilir.

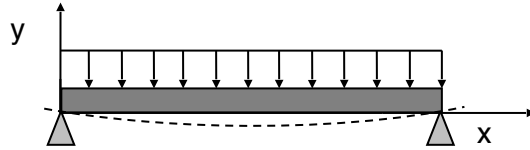
Sınır değer problemleri: Sınır değer probleminde verilen koşullar iki veya daha fazla farklı noktada uygulanır. Örnek olarak L uzunluğundaki kirişin eğilmesini veren diferensiyel denklem;

$$El \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) \quad (9)$$

Bu denklemde E kirişin esneklik modülü, I kirişin eylemsizlik momenti, $M(x)$ bükülme momenti, x kirişin sol başlangıcındaki yatay mesafe ve y ise x noktasına göre dikey yerdeğiştirme. Verilen sınır koşulları:

$$x = 0 \text{ da } y = 0 \quad \text{ve} \quad x = L \text{ de } y = 0$$

olsun. Bu denklemde E ve I birer sabitler olmak üzere y eğilme fonksiyonu ile x arasındaki ilişkiyi arıyoruz.



Şekil 5.1 İki uçundan desteklenmiş bir kirişin uygulanan kuvvet altında eğilmesi

Özdeğer problemleri: Diferensiyel denklemlerin sınır koşulları verilmiş olsa bile sistemdeki bazı parametrelerin ancak belirli değerleri için çözümler bulunabilir. Örneğin kuantum mekaniğinde, $V(x)$ potansiyeli altında E enerjisi ile hareket eden m kütleli bir parçacık için Schrödinger denkleminin

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

belirli E enerji değerleri için, $x \rightarrow \pm\infty$ iken sıfıra giden $\psi(x)$ çözümleri bulunabilir. Bu koşulları sağlayan E_n değerleri de diferensiyel denklemin özdeğerleri olur.

Birinci Merteben Adi Diferensiyel Denklemler

Bir diferensiyel denklemin sayısal çözümleri, bağımsız değişken x değerlerini ve bu değerlere karşı gelen bağımlı değişken y değerlerini içeren bir çizelgeden meydana gelir. Birinci mertebeden adi diferensiyel denklemin genel formu;

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

ve başlangıç koşulu $x = x_0$ için $y = y_0$ olarak verilir. Bu denklem her zaman kolayca analitik olarak integre edilemez. Bu bölümde denklemleri sayısal çözen birkaç yöntem gösterilecektir.

Fen ve mühendislik alanlarında adi diferensiyel denklemlerin sayısal çözümleri önemli olduğundan bu konu fazla ilgi görmektedir ve birçok yöntem geliştirilmiştir. Genelde bu yöntemler iki gruba ayrılır.

- Tek adımlı yöntemler: $y = f(x)$ eğrisi üzerinde bir noktanın bulunmasında bir önceki adımda tek bir noktaya ait bilgiyi kullanır. Bu gruba ait yöntemler Euler yöntemi ve Runge-Kutta yöntemlerini içerir. Bu yöntemler doğrudan yöntemlerdir ve iterasyon içermezler.
- Çok adımlı yöntemler: $y = f(x)$ eğrisi üzerinde bir sonraki noktanın bulunmasında, bir önceki adımda birden fazla noktanın bilgisini kullanır. Bu durumda yeterince yaklaşık değere ulaşmak için iterasyon gereklidir. Bu yöntemler aynı zamanda tahmin-düzeltilme yöntemleri olarak da bilinir. Milne yöntemi ve Adams-Moulton yöntemi bu gruba ait yöntemlerdir.

Euler Yöntemi

Bu yöntem birinci mertebeden adi diferensiyel denklemlere uygulanabilir. Aşağıda verilen birinci mertebeden diferensiyel denklemi ele alalım:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Burada $y(x_0) = y_0$ şeklinde başlangıç koşulu vardır. Yaklaşık olarak $y(x)$ çözümünü bulmaya çalışalım. Bu yaklaşıklık için $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$ 'e karşılık gelen birbirinden farklı y_1, y_2, \dots, y_n değerleri olacaktır. Eğer $x = x_0$ başlangıç noktasına karşı gelen $y(x)$ fonksiyonunun çözüm değeri biliniyorsa, o noktadaki eğim de biliniyor demektir. Eğriyi takip etmek için bilinen bir başlangıç noktasından başlayıp eğrinin gradyenti doğrultusunda ilerlemek mümkün olmaktadır. Türevin tanımından;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

yazılabilir. Bu denklem düzenlenerek aşağıdaki formda yazılabilir;

$$y(x + \Delta x) = y(x) + \frac{dy}{dx} \Delta x$$

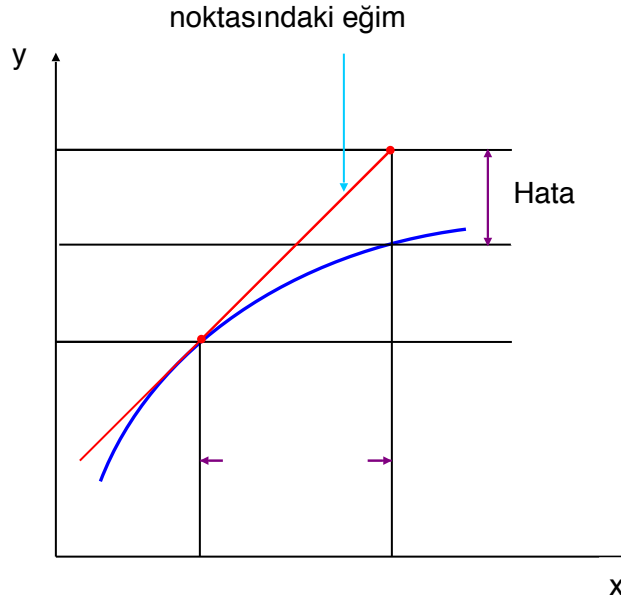
Burada $x = x_i$ için $dy/dx = f(x_i, y_i)$ 'dir ve $f(x_i, y_i)$, (x_i, y_i) noktasının tahmini eğimini temsil etmektedir. Böylece,

$$y(x_i + \Delta x) = y(x_i) + f(x_i, y_i) \Delta x_i$$

elde edilir. Δx_i adım aralığıdır ve $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ile ifade edilebilir. Euler yönteminde x_1, x_2, \dots, x_n noktaları eşit aralıklı olmak zorunda değildir. Eğer aralıklar eşitse $x_{i+1} - x_i$ ifadesi yerine h yazılarak aşağıdaki Euler algoritması elde edilir.

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Euler yönteminde (x_0, y_0) başlangıç değeri kullanılarak tahmini y_1 değeri elde edilir. $y(x_i)$, x_i noktasındaki çözümün tam değeri ve y_i de hesaplanan değerdir. Tahmini y_2 değeri, (x_1, y_1) noktası kullanılarak belirlenir, Şekil 5.2. Bu işlem y_n elde edilinceye kadar tüm aralıklar üzerinden devam eder. Her adımda x 'in değeri h kadar artarken ilgili y hesaplanır.



Şekil 5.2 Euler yönteminin grafiksel gösterimi

Şekil 5.1'den görüldüğü gibi Euler yöntemi (x_i, y_i) noktasının eğimini kullanarak h uzaklıktaki y_{i+1} 'i elde eder. $y(x)$ fonksiyonu, (x_i, y_i) noktasının tanjant çizgisiyle aynı düz bir çizgiyle temsil edilmiştir.

Örnek: $y' = y - x$ diferensiyel denklemini $y(0) = 2$ başlangıç koşulu olmak üzere Euler yöntemiyle çözüünüz. $x = 0.2$, $x = 0.4$ ve $x = 0.6$, $x = 0.8$ değerine karşılık gelen $y(x)$ çözümlerini bulunuz.

Çözüm: Euler denklemine göre $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$ yazılır. Adım aralığı $h = 0.2$ ve $dy/dx = f(x_i, y_i) = y_i - x_i$ alınır.

$i = 0$ için $y(x_1)$ 'in yaklaşık değeri, $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$ dir. Buradan $f(x_0, y_0) = y_0 - x_0 = 2 - 0 = 2$ ve $y_1 = 2 + 0.2(2) = 2.4$ bulunur.

$i = 1$ için $y(x_2)$ 'nin yaklaşık değeri, $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$ dir. $f(x_1, y_1) = y_1 - x_1 = 2.4 - 0.2 = 2.2$ ve $y_2 = 2.4 + 0.2(2.2) = 2.84$ bulunur.

$i = 2$ için $y(x_3)$ 'ün yaklaşık değeri, $y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2)$ dir. $f(x_2, y_2) = y_2 - x_2 = 2.84 - 0.4 = 2.44$ ve $y_3 = 2.84 + 0.2(2.44) = 3.328$ bulunur.

$i = 3$ için $y(x_4)$ 'ün yaklaşık değeri, $y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3)$ dir. $f(x_3, y_3) = y_3 - x_3 = 3.328 - 0.6 = 2.728$ ve $y_4 = 3.328 + 0.2(2.728) = 3.8736$ bulunur.

Euler yöntemi ile birinci mertebeden diferensiyel denklemleri çözen örnek program aşağıda verilmiştir. Önceki örnekte elde edilen sonuçlarla karşılaştırma yapmak için aynı denklem ve aynı başlangıç koşulları kullanılmıştır. Ayrıca programda verilen diferensiyel denklemin $y(x) = 1 + x + e^x$ analitik çözüm fonksiyonunun, verilen x 'lere karşı gelen değerlerini de hesaplanmaktadır.

- **FORTTRAN programı**
program dif_euler

```

implicit real*8 (a-h,o-z)
parameter (n=5)
dimension x(0:n-1),y(0:n-1)
x0=0.8d0
xn=1.d0
y0=2.d0
write(*,*)"x(i) ", " y(i)"
call euler(x0,xn,y0,n,x,y)
do i=0,n
write(*,*)x(i),y(i),fonk(x(i))
enddo
end

```

```

subroutine euler(x0,xn,y0,n,x,y)
implicit real*8 (a-h,o-z)
dimension x(0:n-1),y(0:n-1)
h=(xn-x0)/n
x(0)=x0
y(0)=y0
do i=0,n-1
x(i+1)=x(i)+h
y(i+1)=y(i)+f(x(i),y(i))*h
enddo
return
end

```

```

function f(x,y)

```

```
implicit real*8 (a-h,o-z)
```

```
f=y-x
```

```
return
```

```
end
```

```
function fonk(x)
```

```
implicit real*8 (a-h,o-z)
```

```
fonk=1.d0+x+exp(x)
```

```
return
```

```
end
```

Program çalıştırıldığında x değerleri ve karşı gelen y değerleri ile analitik çözüm $y(x)$ değerleri aşağıdaki Çizelge 5.1'deki gibi elde edilmektedir. Buradaki sonuçlardan da görüldüğü gibi Euler yönteminde başlangıç (x_0) noktasına yakın x değerlerinde, hata daha az fakat uzaklaştıkça hata büyümektedir. Bu nedenle, bu yöntemde çözümü istenen bölgenin bir ön tahmini gereklidir.

Çizelge 5.1 Euler yöntemiyle elde edilen çözümler

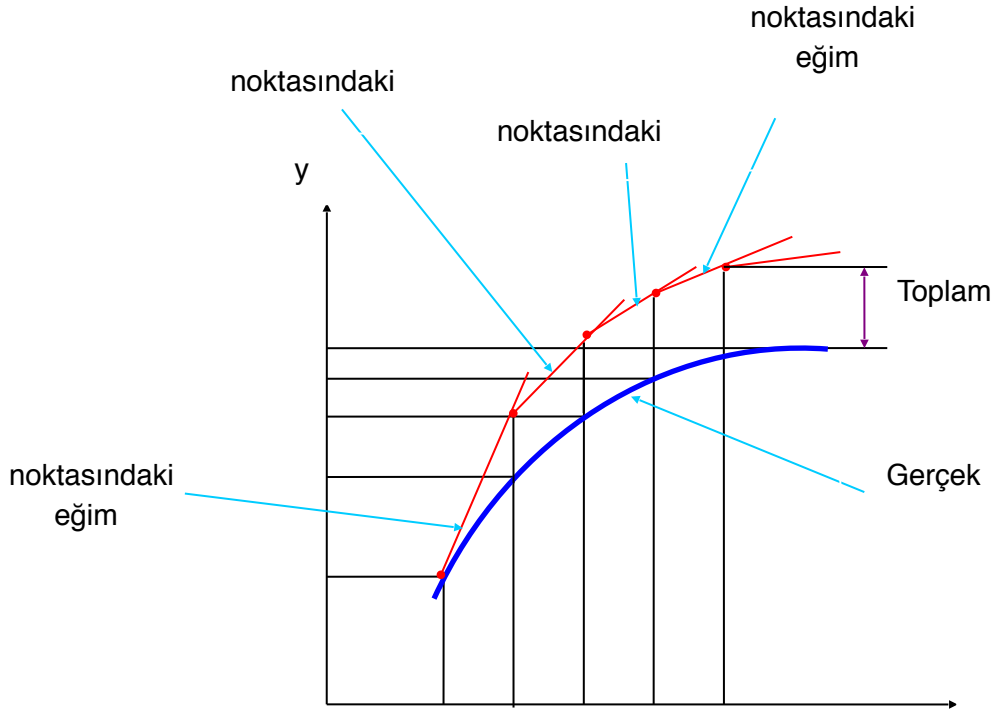
x_i	y_i	$y(x_i)$
0.	2.	2.
0.2	2.4	2.42140276
0.4	2.84	2.8918247
0.6	3.328	3.4221188
0.8	3.8736	4.02554093
1.	4.48832	4.71828183

Euler yöntemindeki hatalar

1) Yuvarlama hataları: Tüm sayısal uygulamalarda bilgisayar sonlu anlamlı sayılara sahip olduğundan yuvarlamalar doğaldır.

2) Kesme hataları: Kullanılan ifadelerin kesikli hale getirilmesinden kaynaklanır. Kesme hataları iki kısımdan oluşur. Yerel (local) kesme hataları yöntemin tek bir adımının uygulamasında meydana gelir. Euler yönteminde (x_i, y_i) noktasındaki eğimi tahmin ederken kullanılan yaklaşık ifade nedeniyle oluşur. Aynı zamanda başlangıç aralığının eğimi tüm aralıkların yaklaşık eğimi için kullanılır.

Önceki adımlardaki yaklaşıktan dolayı kesme hataları çoğalır. Buna yayılan kesme hataları denir. y_{i+1} 'inci değerinde, hesaplanan y_i 'den dolayı bir hata oluşur. $y(x_i)$ gerçek değerine karşılık y_i , i.inci yaklaşık evresidir. i 'nin büyük değerlerinde yaklaşık hata önemlidir. Şekil 5.3'de Euler yönteminde, birkaç adımdaki artan kesme hataları gösterilmektedir. Yerel kesme hataları ile yayılan kesme hatalarının toplamına genel (global) kesme hatası denir. Toplam hata ise tüm hataların toplamıdır.



Şekil 5.3 Euler yönteminde hata yayılması

Euler yönteminin doğruluğu, h adım aralığını azaltarak geliştirilebilir. Bununla birlikte, tatmin edici bir sonuca ulaşabilmek için önemli bir hesaplama çabası gereklidir. Bundan dolayı Euler yöntemi nadir kullanılır. Ama basitliği nedeniyle daha karmaşık yöntemlerin geliştirilmesinde yararlı bir başlangıç oluşturur. Bu yöntem birinci mertebeli $O(h)$ yöntemidir. Ayrıca x_i 'den x_{i+1} 'e ilerlemek için sadece $y(x)$ 'in bir önceki adımdaki $y(x_i)$ değerini kullandığından Euler yöntemi tek adımlı yöntemdir. Matematiksel olarak $y(x)$ fonksiyonunun $x=x_0$ civarında Taylor serisi açılımında,

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + (x - x_0)^2 \frac{y''(x_0)}{2!} + (x - x_0)^3 \frac{y'''(x_0)}{3!} + \dots$$

denkleminin sağ tarafı, ancak daha yüksek dereceden türevler bilinirse hesaplanabilir. Burada $O(h)$ mertebeli terimleri alıp daha yüksek mertebeden terimleri ihmal ettiğimizde Euler yöntemini elde ederiz;

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)h$$

burada $x_i + h = x_{i+1}$ 'dir. Bu iki yöntemin karşılaştırılması sonucu Euler yönteminde yerel kesme hatasının $O(h^2)$ mertebesinde olduğu görülür.

Geliştirilmiş Euler Yöntemi

Euler yönteminde eğim, aralığın başlangıcındaki değerine eşit alınmış ve bütün h aralığı boyunca sabit olduğu varsayılmıştır. Bu varsayım Euler yönteminde temel hata kaynağıdır.

Gerçekte eğrinin eğimi aralık boyunca sabit değildir ($y(x)$ fonksiyonu x 'e göre lineer değilse) ve bağımsız x değişkeni değiştikçe sürekli olarak değişir. Euler yöntemi aralık üzerindeki eğimi daha iyi bir yaklaşımla tahmin ederek uygulanabilir. Bu ise aralığın sol sınırının eğimi ile sağ sınırının eğiminin ortalaması alınarak yapılabilir. Bu yöntem aynı zamanda Heun yöntemi olarak da bilinir. Tahmini $y(x_{i+1})$ değeri aşağıdaki denklemden bulunur.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} \left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}) \right] h$$

Bu denklem başlangıçta, sağ sınırdaki eğim y_{i+1} 'e bağlı olan $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ bilinmediğinden doğrudan çözülemez. Geliştirilmiş Euler yönteminde bu problemten kurtulmak için temel Euler yöntemi kullanılarak y_{i+1}^* başlangıç tahmini bulunur. Buna göre düzeltilmiş denklem aşağıdaki gibi yazılır.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} h \left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*) \right]$$

burada $y_{i+1}^* = y_i + f(x_i, y_i)h$ ile verilir.

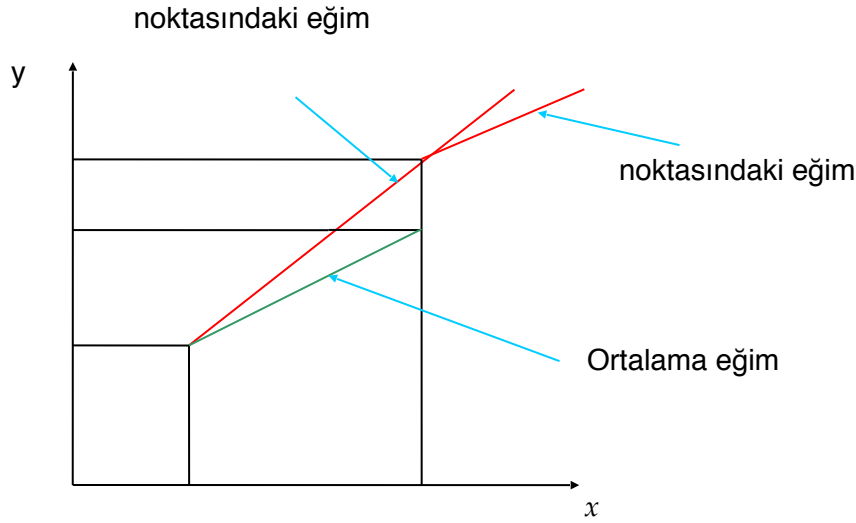
Ayrıca, geliştirilmiş Euler yöntemi birinci ve ikinci türev terimlerini içeren Taylor serisi açılımından da elde edilebilir.

$$y_{i+1} = y_i + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i)$$

Bu denklemde x_i noktasındaki ikinci türev, x_i ve x_{i+1} noktalarındaki birinci türevler cinsinden yazılırsa;

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2} \frac{(y'_{i+1} - y'_i)}{h} \\ &= y_i + \frac{h}{2} (y'_{i+1} + y'_i) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada türevleri $y'_i = f(x_i, y_i)$ ve $y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$ olarak hesaplarız.



Şekil 5.4 Geliştirilmiş Euler yönteminin grafiksel gösterimi

Şekil 5.4'te geliştirilmiş Euler yöntemi gösterilmiştir. Geliştirilmiş Euler yöntemi esas olarak tahmin-düzeltilme yöntemlerinin bir örneğidir. Tahmin edilen y_{i+1}^* değeri hesaplanır, ondan sonra ortaya çıkan y_{i+1} düzeltilmiş değeri elde edilir. Geliştirilmiş Euler yöntemi Taylor serisinin $O(h^2)$ 'li terimlerini de kullandığından temel Euler yönteminden daha doğrudur. Yerel kesme hatası $O(h^3)$ ve genel (global) hata $O(h^2)$ 'dir. Daha fazla doğruluğa ulaşabilmek için y_{i+1}^* ve $f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)$ 'nin bulunmasında ekstra hesap yapmak gerekir. Bununla birlikte sonucun doğruluğunu önemli derecede artırdığından bu ekstra hesaplama tercih edilmektedir.

Örnek: $dy/dx = f(x, y) = x - y$ diferensiyel denklemini $y(0) = 2$ başlangıç koşulu olmak üzere $x=0.2, 0.4$ değerleri için geliştirilmiş Euler yöntemiyle çözünüz.

Çözüm: Geliştirilmiş Euler yöntemi
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$
 ile verilir.

$i=0$ için $y_1 = y_0 + \frac{1}{2}h[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)]$, burada $f(x_0, y_0) = x_0 - y_0 = 0 - 2 = -2$,
 $y_1^* = y_0 + f(x_0, y_0)h = 2 + 0.2(-2) = 1.6$ ve $f(x_1, y_1^*) = x_1 - y_1^* = 0.2 - 1.6 = -1.4$ dir. Buna göre
 y_1 'in düzeltilmiş değeri $y_1 = 2 + (0.2/2)(-2.0 - 1.4) = 1.66$ olarak bulunur.

$i=1$ için $y_2 = y_1 + \frac{1}{2}h[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^*)]$, burada $f(x_1, y_1) = x_1 - y_1 = 0.2 - 1.66 = -1.46$,

$$y_2^* = y_1 + f(x_1, y_1)h = 1.66 + 0.2(-1.46) = 1.368, f(x_2, y_2^*) = x_2 - y_2^* = 0.4 - 1.368 = 0.960$$

ve $y_2 = 1.66 + (0.2/2)(-1.46 - 0.960) = 1.4180$ bulunur.

Geliştirilmiş Euler yöntemini uygulayan bir altprogram aşağıda verilmiştir.

- FORTRAN altprogramı
subroutine gel_euler(x0,xn,y0,n,x,y)
implicit real*8 (a-h,o-z)
dimension x(0:n-1),y(0:n-1)
h=(xn-x0)/n
x(0)=x0
y(0)=y0
do i=0,n-1
x(i+1)=x(i)+h
y(i+1)=y(i)+f(x(i),y(i))*h
y(i+1)=y(i)+0.5*h*(f(x(i),y(i))+f(x(i+1),y(i+1)))
enddo
return
end

Değiştirilmiş Euler Yöntemi

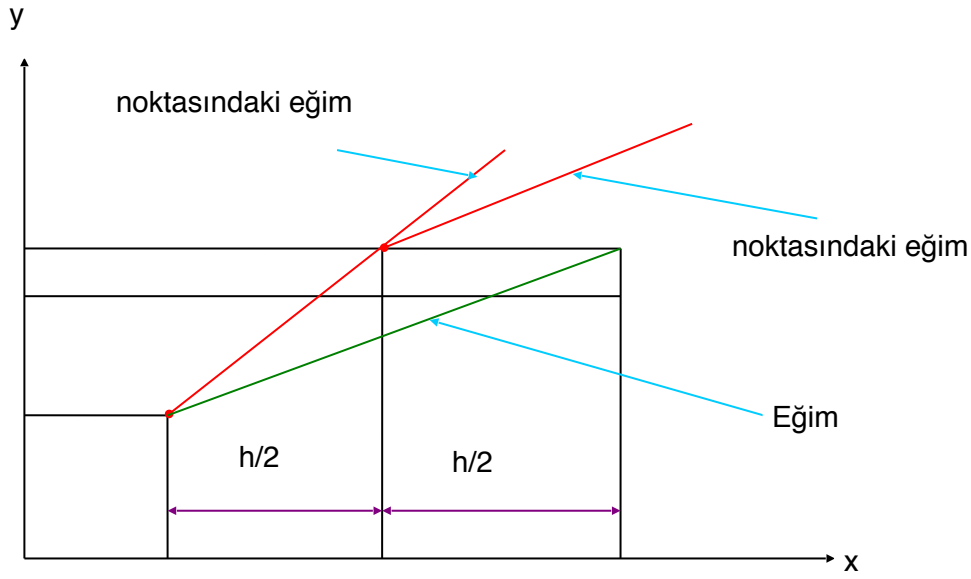
Bu yöntemde amaç, aralığın orta noktasındaki eğimi tahmin ederek, y_{i+1} değerini belirlemek için bunu tüm aralık üzerinde kullanmaktır. Aralığın orta noktasındaki eğim tüm aralık üzerinde ortalama eğim olarak alınır. Bu eğim Euler yöntemiyle x_i 'den x_{i+1} 'e lineer extrapolasyon yapmak için kullanılır;

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$$

Burada $x_{i+1/2}$, $[x_i, x_{i+1}]$ aralığının orta noktasındaki x değeri ve $y_{i+1/2}$ ise bu değere karşılık gelen y değeridir. Bu denklem, orta noktadaki $y_{i+1/2}$ değeri bilinmediğinden doğrudan çözülemez. Bununla birlikte temel Euler yöntemini kullanarak bu y değerini tahmin edebiliriz.

$$y_{i+1/2}^* = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$$

Burada $y_{i+1/2}^*$, $y_{i+1/2}$ tahmini değeridir. Değiştirilmiş Euler yöntemi $O(h^2)$ mertebesindedir ve yerel kesme hatası $O(h^3)$ mertebesindedir. Geliştirilmiş Euler yöntemi ve değiştirilmiş Euler yöntemi ikinci mertebe Runge-Kutta yönteminin özel durumlarıdır.



Şekil 5.5 Değiştirilmiş Euler yönteminin grafiksel gösterimi

Değiştirilmiş Euler yöntemi Şekil 5.5’de gösterilmiştir. Bu yöntem ile diferensiyel denklem çözen alt program aşağıda verilmiştir.

- **FORTTRAN altprogram**

```
subroutine deg_euler(x0,xn,y0,n,x,y)
```

```
implicit real*8 (a-h,o-z)
```

```
dimension x(0:n-1),y(0:n-1)
```

```
h=(xn-x0)/n
```

```
x(0)=x0
```

```
y(0)=y0
```

```
do i=0,n-1
```

```
  x(i+1)=x(i)+h
```

```
  x_or=x(i)+h/2.
```

```
  y_or=y(i)+f(x(i),y(i))*h/2.
```

```
  y(i+1)=y(i)+f(x_or,y_or)*h
```

```
enddo
```

```
return
```

```
end
```

Sonuç olarak, Euler yöntemi üzerinde yapılan düzeltmelerin ana fikri, h aralığı boyunca ortalama eğim kullanmaktır. Geliştirilmiş Euler yönteminde ortalama eğim h aralığının sol sınırındaki eğim ile sağ sınırındaki eğimin ortalamasıyla alınır. Değiştirilmiş Euler yönteminde ortalama eğim ise aralığın orta noktasındaki eğimden alınır.