7.2 İkinci Mertebe Sistemler

Basamak girdiye tepki

Diferansiyel denklem tanımı:

$$\tau^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dy}{dt} + y = x(t)$$

Transfer fonksiyonu:

$$G(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

$$x(s) = \frac{1}{s} \text{ için } \longrightarrow y(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

$$= \frac{1/\tau^2}{s(s - p_1)(s - p_2)}$$

$$\text{Poles : } p_{1,2} = -\frac{\zeta}{\tau} + \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}$$

$\zeta < 1$ için : Komleks kökler, salınımlı yanıtım ; **UNDERDAMPED**

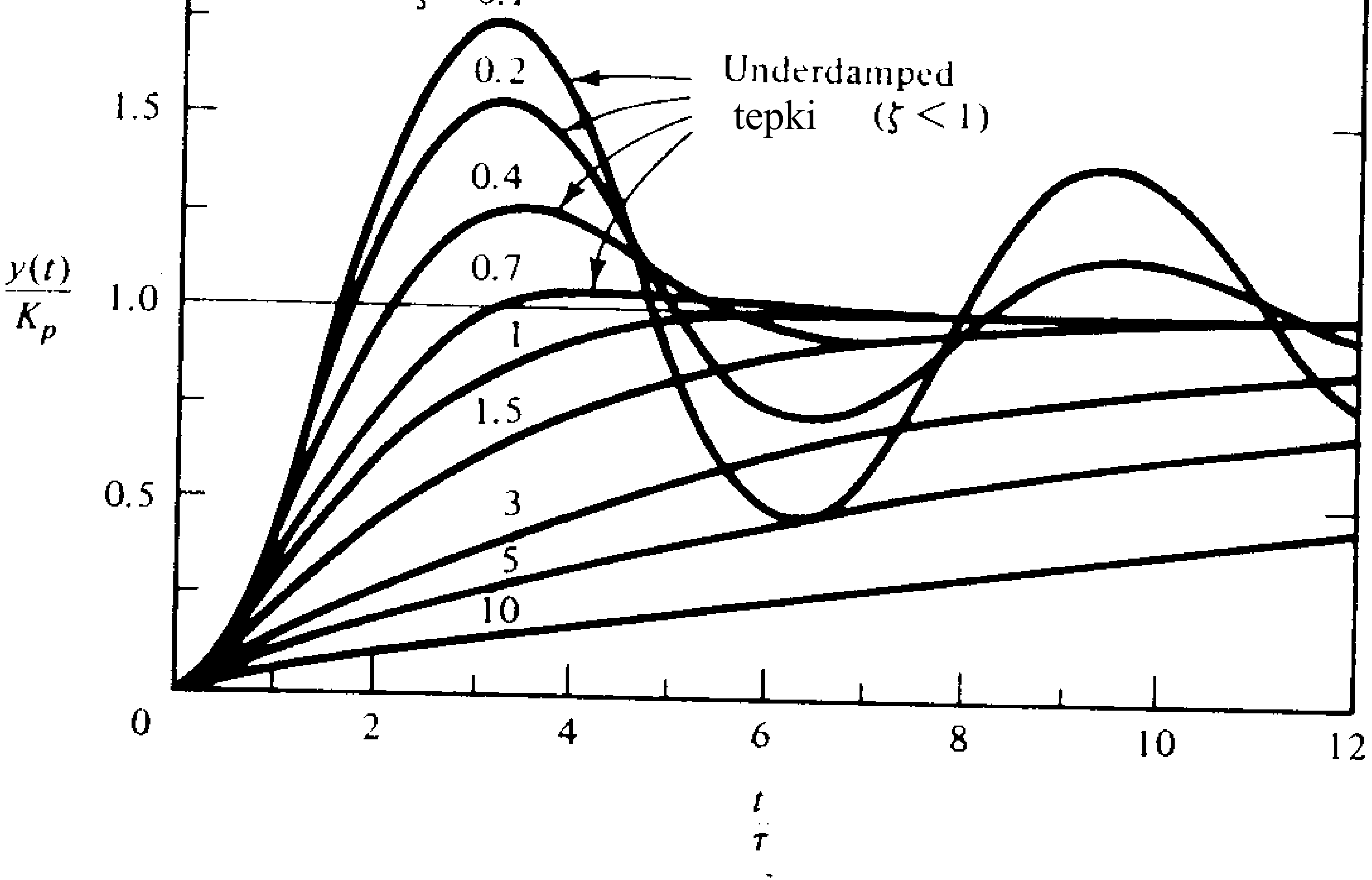
$\zeta = 1$ için : 'LHP' de gerçek bir kök ; **CRITICALLY DAMPED**

$\zeta > 1$ için : Gerçek kökler ; **OVERDAMPED**

ζ = ***Damping ratio***

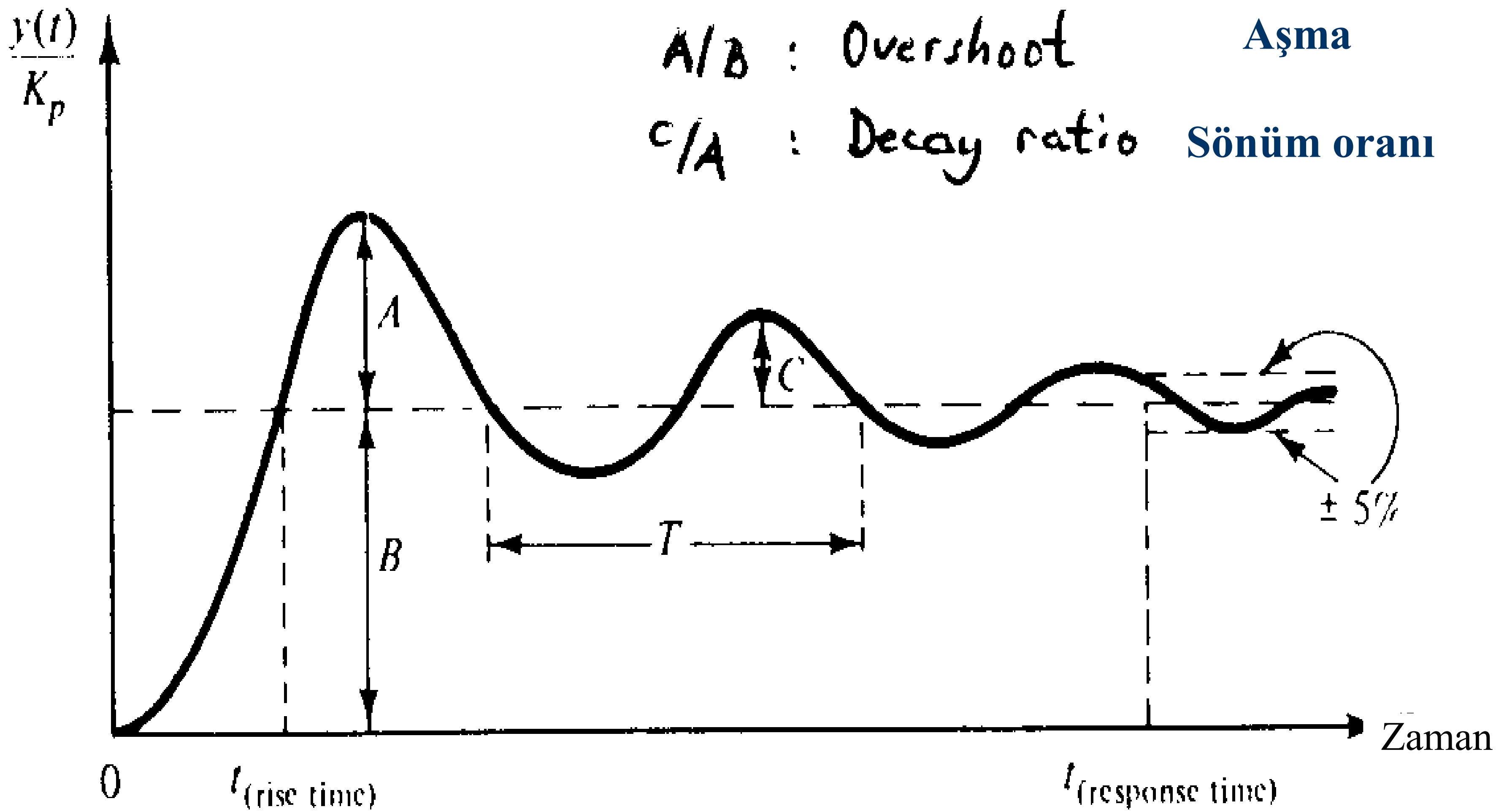
LHP : ***Left Half Plane***

Kompleks sayı sisteminde dikey eksenin sol tarafındaki düzlem



(b)

2. Mertebe sistemin birim basamak değişimine yanıtı



Underdamped tepkinin karakteristikleri

Frekans Yanıtımı

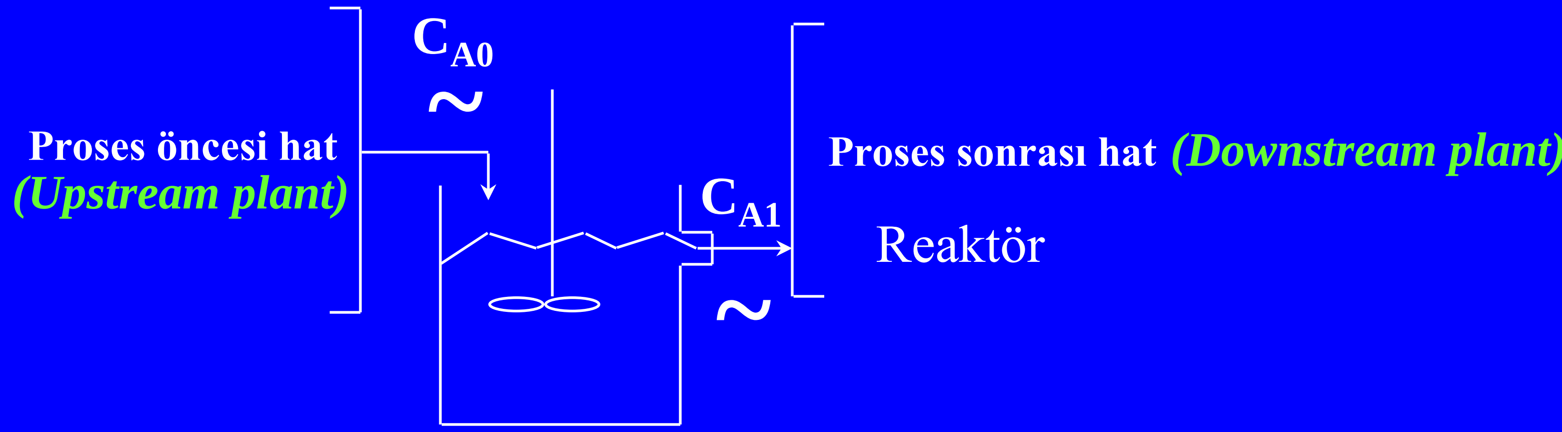
- **Bazen girdilerdeki değişimler periyodik olabilir**

  Bu durumda dinamik davranış, farklı frekanslardaki girdiler için incelenmelidir

- **Prosesin yanıtımı, girdinin frekansına *(yavaş, hızlı, orta)* bağlıdır**

  Örneğin bazı durumlarda düşük veya hızlı frekanslarda önemli etkilenme gözlenmezken ara frekanslarda çıktının genliği girdininkinden çok daha yüksek olabilir

Birinci mertebeden, pratiğe yönelik bir örnek ;



Bir reaktöre giren akımın derişimi, reaktörün kaldırabileceği sınırların ötesinde bir genlikte salınmaktadır. Bunu önlemek üzere proses öncesi hatta değişiklik yapılamamaktadır. Ancak, reaktör öncesine bir *drum* yerleştirilmesi düşünülebilir. Reaktör girişindeki (*drum* çıkışı) salınımların genliğinin + - 20 g/m^3 den büyük olmaması için gerekli en az *drum* hacmi ne kadardır?

Veriler:

- **Hacimsel debi, F = 1 m^3/dk**
- **C_{Ao} daki salınımlar 200 g/m^3 etrafında 5 dk periyodlu ve 200 g/m^3 genlikli sinüs dalgası halindedir**

Çözüm: **Karıştırmalı tank modeli daha önce çıkarılmıştı**

Giriş fonksiyonu $C_{Ao} = A\sin(\omega t)$

$$V\frac{dC_{A1}}{dt} = F(A\sin(\omega t)) - FC_{A1}$$

Bu denklemin çözümü integral faktörü veya Laplace transformu yoluyla bulunabilir

$$C_{A1}(s) = \frac{A\omega}{\tau}\ \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)(s^2 + \omega^2)}$$

Burada; $\tau = \frac{V}{F}$

Zaman alanına dönüştürülürse, çıkış derişiminin zamanla değişimi şöyle olacaktır

$$C_{A1}(t) = \frac{A\omega\,\tau}{1 + \tau^2\omega^2} e^{-t/\tau} + \frac{A}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}\sin(\omega t + \phi)$$

Bu denkleme göre çıkıştaki salınımların genliği bellidir [A / (.)]

Çıkış salınımlarının genliği en fazla 20 olabilir.

➔ **Öyleyse;**

$$|C_{A1}|_{max} = \frac{A}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} = 20$$

Buradan prosesin zaman sabiti τ elde edilebilir.

Öte yandan, $V=\tau F$ olduğuna göre yukardaki en fazla salınımı karşılayabilecek *drum* hacmi bulunabilir:

$$V = \tau F = F \frac{\sqrt{\left(\dfrac{A}{|C_{A1}|\,max}\right)^2 - 1}}{\omega} = 1.0 \frac{\sqrt{(200/20)^2 - 1}}{2\pi / 5} = 7.9 m^3$$

Bölüm 8. KONTROL EYLEMLERİNİN YANITIMA ETKİSİ

- **P Kontrol:**

$G_c = K_c$

$G_m = G_f = 1$ alalım

Birinci mertebe bir sistem:

$$G_p = \frac{K_p}{\tau_p s + 1} \qquad G_d = \frac{K_d}{\tau_d s + 1}$$

Bunları kapalı devre transfer fonksiyonlarına yerleştirelim;

$$y = \frac{K_p'}{\tau_p' s + 1} y_{sp} + \frac{K_d'}{\tau_p' s + 1} d$$

$$\tau_p' = \frac{\tau_p}{1 + K_p K_c} \qquad K_p' = \frac{K_p K_c}{1 + K_p K_c} \qquad K_d' = \frac{K_d}{1 + K_p K_c}$$

Servo problemi için *(yani, d= 0)* y_{sp} de basamak değişimi:

$$y(s) = \frac{K_p'}{\tau_p' s + 1}\,\frac{1}{s}$$

$$y(t) = K_p'\left(1 - e^{-t/\tau_p'}\right)$$

Son yanıtım istenen yeni set noktasına ulaşamaz !!!

Offset = (Yeni set noktası) - (Yanıtımın son değeri)

$$= 1 - K_p' = 1 - \frac{K_pK_c}{1 + K_pK_c} = \frac{1}{1 + K_pK_c}$$

Teorik olarak, $K_c \rightarrow \infty$ gittiği zaman offset $\rightarrow 0$

Ama bunun bedeli pahalı olabilir: Kararsızlık !!!

Ödev : Regulator problem için durumu tartışınız.

Geri Beslemeli Kontrol Edici Eylemleri

Oransal Kontrol (P)

$$\mathbf{c(t) = K_c\, \varepsilon(t) + c_s}$$

Oransal Kazanç

BIAS sinyali : $\varepsilon = 0$ durumundaki sinyal

Sapma değişkeni : $C(t) = c(t) - c_s$

$$\mathbf{C(t) = K_c\, \varepsilon\,(t)}$$

$$\therefore\ \mathbf{G_c(s) = K_c}$$

Oransal Bant : $PB = 100 / K_c$

Oransal - Integral Kontrol (PI)

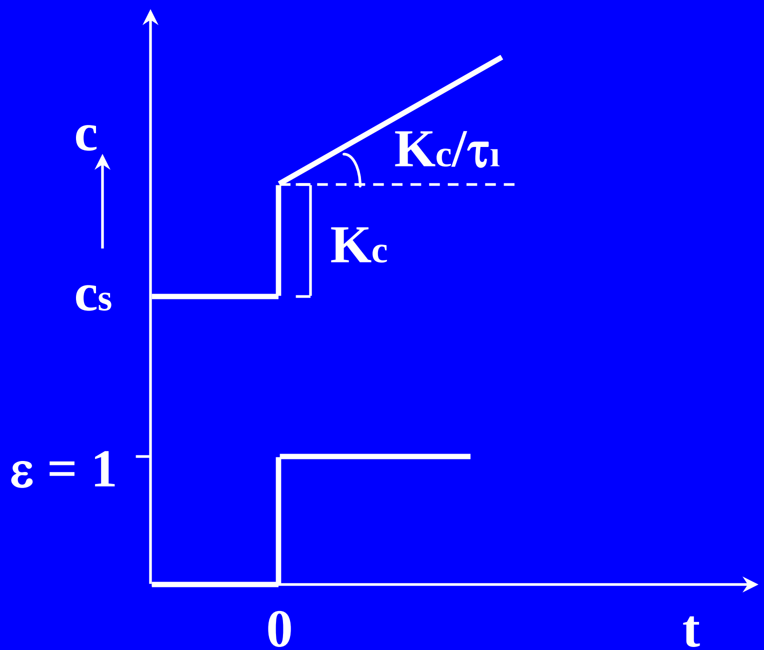
$$c(t) = K_c\,\varepsilon(t) + \frac{K_c}{\tau_I}\int_0^t \varepsilon(t)\,dt + c_s$$

İntegral zaman sabiti

$$C(t) = K_c\,\varepsilon(t) + \frac{K_c}{\tau_I}\int_0^t \varepsilon(t)\,dt$$

Laplace döşümü:

$$G_c(s) = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right)$$

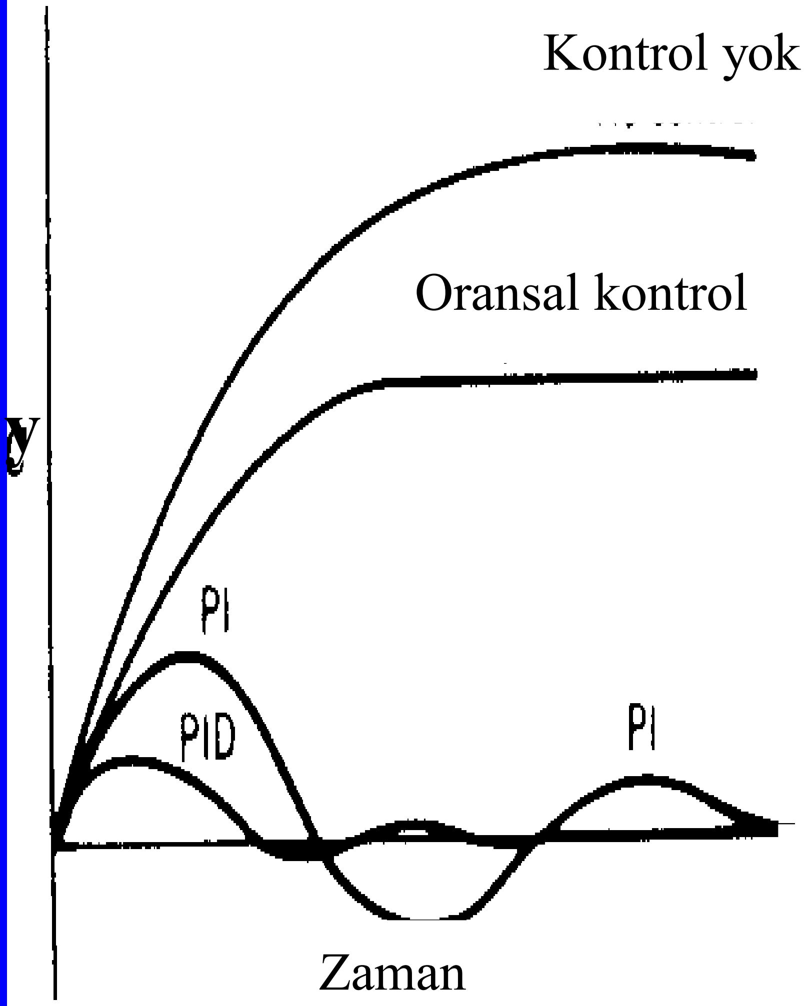


Oransal - Integral - Türev Kontrol (PID)

$$C(t) = K_c\,\varepsilon(t) + \frac{K_c}{\tau_I}\int_0^t \varepsilon(t)dt + \underbrace{K_c\,\tau_D}_{\text{RATE; PREACT}}\frac{d\varepsilon}{dt}$$

Laplace dönüşümü:

$$G_c(s) = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s\right)$$



Geribesleme kontrolda tipik proses tepkileri