ANKARA ÜNİVERSİTESİ

NÜKLEER BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

TEK BOYUTTA DİFÜZYON DENKLEMİ VE ÇÖZÜMÜ

İLERİ NÖTRON VE REAKTÖR FİZİĞİ

PROF. DR. HALUK YÜCEL

Nötron Akısı

- Tek enerjili nötronlar için tepkime hızı, R (Reaction Rate);

$$R = \Sigma_t \emptyset \ veya \ R = \Sigma_t (n.v)$$

Burada,

$n(E)$ =Birim enerjideki nötron yoğunluğu yani,

$$n(E)dE = \frac{\#nötron}{cm^3}$$

enerjisi E ile $E + \Delta E$ arasındaki birim hacimdeki nötronların sayısı

- Mono enerjetik nötronlar için "etkileşme hızı" (Interaction)

$$dR = \Sigma(\mathrm{E})\mathrm{n}(\mathrm{E})\mathrm{v}(\mathrm{E})\mathrm{dE}$$

- Toplam etkileşme sayısı, $R = \int_0^\infty dR = \int_0^\infty \Sigma_t(\mathrm{E})\emptyset(\mathrm{E})\mathrm{dE}$

Burada, $\emptyset(\mathrm{E}) = \mathrm{n}(\mathrm{E}).\mathrm{v}(\mathrm{E})$ enerjiye bağlı akı veya birim enerji başına nötron akısı adı alır.

Saçılma yoğunluğu için $\frac{\#\ saçılma\ etkileşmeleri}{cm^3/s}$

- Saçılma,

$$R_s = \int_0^\infty \Sigma_s(\mathrm{E})\emptyset(\mathrm{E})\mathrm{dE}$$

- Soğurulan nötronların cm^3/s' deki sayısı;

$$R_a = \int_0^\infty \Sigma_a(\mathrm{E})\emptyset(\mathrm{E})\mathrm{dE}$$

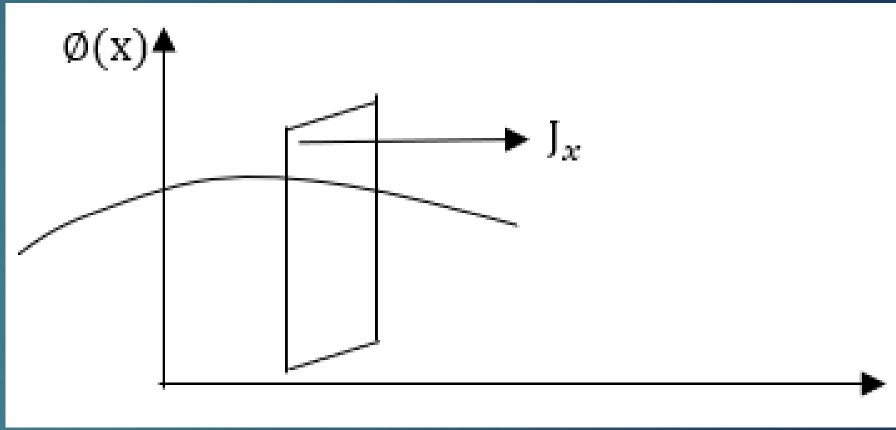
Fick Yasası

Difüzyon teorisi fick yasasını temel alır.

Fick Yasası

- Difüzyon teorisi fick yasasını temel alır.
- Yüksek konsantrasyondan, düşük konsantrasyona

doğru bir akım difüzyonla olur.



$$J_x = -D\frac{d\emptyset}{dx} \quad (Fick\ Yasası)$$

J_x: x – doğrultusunda ve bu doğrultuya dik birim yüzeyden (cm^2), birim zamanda (s) geçen nötronların net sayısıdır.

Net Akım: $J_x\left(\frac{nötron}{cm^s.s}\right)$, D(cm): Difüzyon katsayısı

$$\vec{J} = -D\nabla\emptyset = -Dgrad\emptyset$$
$$J.\hat{\imath} = J_x$$
$$J.\hat{n} = J_n$$

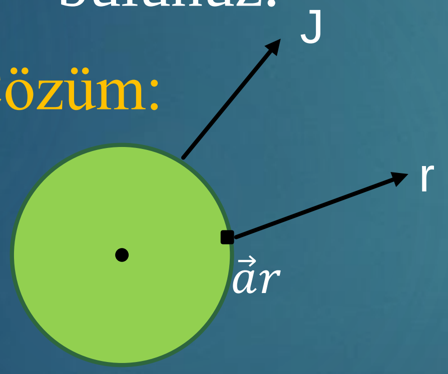
Örnek: Sonsuz bir moderatör ortamında birim zamanda yayınlanan nötronların sayısı n ise, bu kaynaktan r mesafedeki akının $\emptyset(r) = \frac{S.e^{-r/L}}{4\pi r D}$ olduğu gösterilebilir. Burada, $L =$ sabittir.

Buna göre,

a) Moderatör ortamındaki net akımı bulunuz.

b) Kaynağı çevreleyen r yarıçaplı bir küreden dışarı akan nötronların sayısını bulunuz.

Çözüm:



$$\nabla r = \vec{a}r \frac{d}{dr}$$

$$\vec{a}r = birim\ radyal$$

a) Fick kanunu,

$$\vec{J} = -D\nabla\emptyset$$

$$\vec{J}(r) = -D\vec{a}r\frac{d}{dr}\left(\frac{S.e^{-r/L}}{4\pi rD}\right)$$

$$= \vec{a}r\frac{S}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r.L}\right).e^{-r/L}$$

b) $\vec{J}$ net akım küre yüzeyine her noktada dik olduğuna göre, kürenin birim yüzeyinden geçen nötronların net sayısı $\vec{J}$ vektörünün büyüklüğüne (magnitude) tam eşit olmalıdır.

O halde $\vec{J}.\vec{a}r = J$, net nötron akısı, $4\pi r^2$ küre yüzeyinden olduğuna göre;

$$4\pi r^2 J_r\vec{a}r = \vec{a}rS\left(1 + \frac{r}{L}\right).e^{-r/L}$$

$$J_r = \frac{S}{4\pi r^2}\left(1 + \frac{r}{L}\right).e^{-r/L}$$

$$D = \frac{\lambda_{tr}}{3} \quad ve \quad \lambda_{tr} = \frac{1}{\Sigma_{tr}} = \frac{1}{\Sigma_s(1-\bar{\mu})} \;, \qquad \bar{\mu} = 2/3A$$

olduğuna göre, saçıcı ortam grafit (karbon) olduğunda 1eV'de saçılma tesir kesiti 4.8b olduğuna göre, grafit için difüzyon katsayısı D ne olur?

$$\sigma_s = 4.8b \; @1eV, \qquad A = 12, \qquad \bar{\mu} = 0.055$$

Atom yoğunluğu; $n = 8.023x10^{22}$

$$D = \frac{1}{3\Sigma_s(1-\bar{\mu})} = \frac{1}{3x8.02x10^{23}x4.8x10^{-24}(1-0.055)} = 1.058cm$$

Süreklilik Denklemi

Nötronları bulunduran bir ortamda V hacmi keyfi olarak göz önüne alınırsa, zaman geçtikçe V keyfi hacmi içinde nötronların sayısı, içeriye veya dışarıya net alan varsa, değişikliğe uğrayabilir. Bazen bu V hacmi içinde nötronlar soğurulabilir veya bu hacim içerisine nötron kaynağından nötronlar salınabilir.

$$\begin{bmatrix} V\ hacmindeki \\ nötronların\ sayısındaki \\ değişim\ hızı \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V\ hacmindeki \\ nötron\ üretim \\ hızı \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V\ hacmindeki \\ nötronların \\ soğurulma\ hızı \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V\ hacminden \\ dışarı\ sızan \\ nötron\ hızı \end{bmatrix}$$

V hacmindeki nötronların toplam sayısı= $\int_V ndV$

Herhangi bir noktada zamanla değişim= $\frac{d}{dt}\int_V ndV$

veya = $\int_V \frac{\partial n}{\partial t} dV$

Nötron üretim hızı= $\int_V S.dV$

Nötron soğurulma hızı= $\int_V \Sigma_a.\emptyset.dV$

Nötron sızma hızı= $\vec{J}.\vec{n} = \int_A \vec{J}.\vec{n}.dA$

$$\int_A \vec{J}.\vec{n}.dA = \int_V div\vec{J}.dV$$

Balans (Süreklilik) denklemi

$$\int_V \frac{\partial n}{\partial t} dV = \int_V S.dV - \int_V \Sigma_a.\emptyset.dV - \int_V div\vec{J}.dV$$

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = S - \Sigma_a.\emptyset - div\vec{J}}\,(süreklilik\ denklemi\ genel\ formu)$$

Nötron yoğunluğu zamanla değişmiyorsa yukarıdaki denklem ($\frac{\partial n}{\partial t} = 0$)

$\boxed{div\vec{J} + \Sigma_a.\emptyset - S = 0}$ olur.

- Kararlı durum süreklilik denklemi olarak (Steady – state equation of continuity)

Yani $\boxed{\vec{J} = -D\nabla\emptyset = -Dgrad\emptyset}$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{v}\frac{\partial\emptyset}{\partial t}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = S - \Sigma_a.\emptyset - \nabla(-D\nabla\emptyset)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = S - \Sigma_a.\emptyset + D\nabla^2\emptyset$$

$$\boxed{D\nabla^2\emptyset - \Sigma_a.\emptyset + S = \frac{1}{v}\frac{\partial\emptyset}{\partial t}} \qquad Difüzyon\ Denklemi$$

Zamandan bağımsız difüzyon denklemi

$$\boxed{D\nabla^2\emptyset - \Sigma_a.\emptyset + S = 0} \quad Kararlı\ durum\ difüzyon\ denklemi$$

- Kararlı durum nötron denge (balance) denklemi,

$$0 = \begin{bmatrix} V\ hacmindeki \\ nötronların \\ sayısındaki \\ değişim\ hızı \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V\ hacmindeki \\ nötron\ üretim \\ hızı \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V\ hacmindeki \\ nötron\ kayıp \\ hızı \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V\ hacmindeki \\ nötron\ üretim \\ hızı \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Bir\ nesilde\ soğurulan \\ termal\ nötronların \\ sayısı \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} Dört\ çarpan\ formülü \\ ile\ verilen\ nötronun \\ çoğalma\ faktörü \end{bmatrix}$$

$$= \Sigma_a . \emptyset . K_\infty \left[\frac{\#nötron}{cm^3 . s}\right]$$

Dış kaynak g $\left[\frac{\#nötron}{cm^3.s}\right]$

Kaçak nedeniyle kayıp hızı= $-D\nabla^2\emptyset$

Soğurulma nedeniyle kayıp hızı $= \Sigma_a.\emptyset$

Burada $\Sigma_a = \Sigma_{a(yakıt)} + \Sigma_{a(moderatör)} + \Sigma_{a(kontrol)} + \Sigma_{a(yapı,vb.)}$

- Kararlı durum difüzyon denklemi,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \Sigma_a.\emptyset.K_\infty + S - [-D\nabla^2\emptyset + \Sigma_a.\emptyset] = 0$$

$$\boxed{D\nabla^2\emptyset - \Sigma_a.\emptyset + \Sigma_a.\emptyset.K_\infty + S = 0}$$

- Ortamda bir dış kaynak yok ise, S=0 ortam sadece yakıt ve moderatörden oluşmuş ise o zaman,

$\boxed{D\nabla^2\emptyset - \Sigma_a.\emptyset + \Sigma_a.\emptyset.K_\infty = 0}$ olur.

- Ortamda yakıt yok ise, ancak dış kaynaklar belirli lokasyonlarda bulunuyorsa;

$D\nabla^2\emptyset - \Sigma_a.\emptyset = 0$ (kaynağın pozisyonunda S=0 alınırsa)

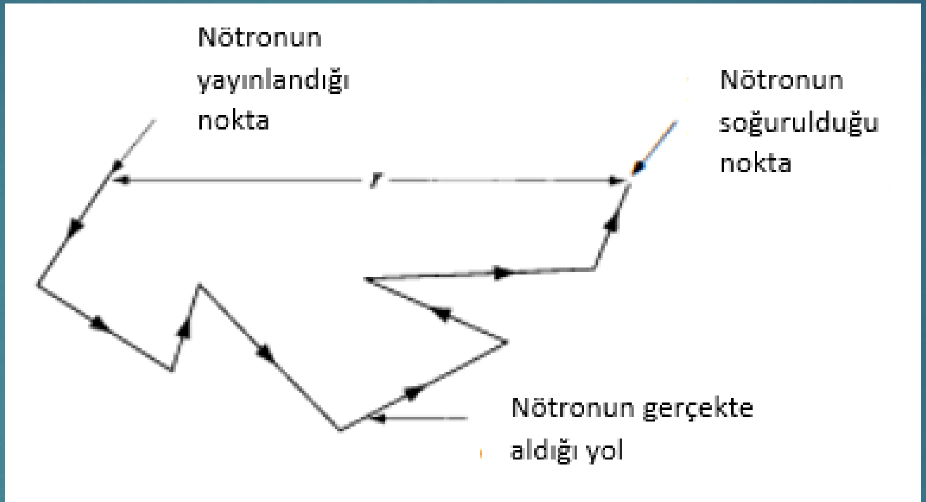
$$\nabla^2\emptyset - \frac{\emptyset}{L^2} = 0$$

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a} = \left(\frac{D}{\Sigma_{a-mod}}\right) x \left(\frac{\Sigma_{a-mod}}{\Sigma_a}\right) = L^2(1-f)$$

$$L = Difüzyon\ uzunluğu\ ,\ f = termal\ yararlanma\ faktörü$$

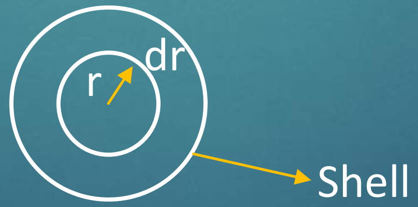
Difüzyon Uzunluğu Kavramı

Difüzyon uzunluğu,



$$d_n = \Sigma_a \emptyset(r) dV$$

Nokta kaynak akısı $\emptyset(r)$ ve hacim elemanı $dV = 4\pi r^2 d\mathrm{r}$



Nötron kaynak akısı;

$$\emptyset = \frac{Se^{-r/L}}{4\pi Dr}$$

$$d_n = \frac{S\Sigma_a}{D} re^{-r/L} dr$$

Burada, $L^2 = \frac{D}{\Sigma_a}$ tanımı yerine konulursa;

$$d_n = \frac{S}{L^2} re^{-r/L} dr$$

O halde S tane nötronun saniyede kaynak tarafından yayınlandığı ve bunlardan d_n tanesi r ile r+dr arasında soğurulacağı varsayılırsa, bir tane nötronun dr kabuğu içinde soğurulması olasılığı;

$$p(r)dr = \frac{1}{L^2} re^{-r/L} dr \text{ olur.}$$

Bu $p(r)dr$ olasılık dağılımının r üzerinden ortalama olarak bir nötronun kaynaktan hangi ortalama mesafede soğurulacağı hesaplanır. Ancak nükleer mühendislikte, r yerine mesafenin karesinin ortalamasının bulunması daha yaygındır.

$$\overline{r^2} = \int_0^\infty r^2 p(r)dr = \frac{1}{L^2}\int_0^\infty r^2 r e^{-r/L} dr = \frac{1}{L^2}\int_0^\infty r^3 e^{-r/L} dr$$

Difüzyon uzunluğunun fiziksel önemi

$$L^2 = \frac{1}{6}\overline{r^2}$$

$\overline{r^2}$ = termal nötronun ulaştığı uzaklığın karesi (nötronların ortalama menzili)

- Fermi yaş teorisinde

$$\overline{r^2} = 6\tau$$

$$\overline{r^2} = \frac{\int_0^\infty A_s \overline{r^4}\, dr}{\int_0^\infty A_s\, r^2 dr}$$

D=difüzyon katsayısı

$$\xi = 2/(A + \frac{2}{3})$$

$$\tau = \int_{E_1=0.025eV}^{E_2=12-15eV} \frac{D}{\xi \Sigma_s}\frac{dE}{E}$$