



ANKARA ÜNİVERSİTESİ

NÜKLEER BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

DİFÜZYON DENKLEMİ ÇÖZÜMÜNDE SINIR KOŞULLARI

İLERİ NÖTRON VE REAKTÖR FİZİĞİ

PROF. DR. HALUK YÜCEL

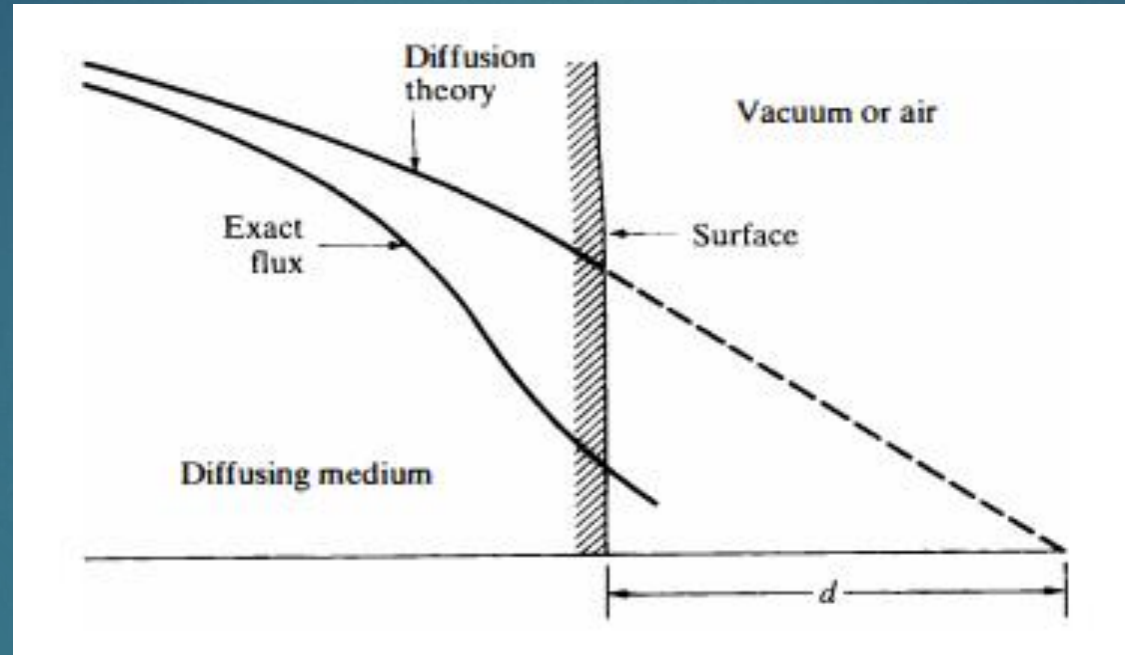
Difüzyon Denklemi Çözümünde Sınır Koşulları:

- Difüzyon denklemi, belirli sınır koşulları altında çözüldükten sonra nötron akısı (ϕ) bulunur. Ancak, difüzyon denklemi kısmi diferansiyel denklemi özelliğinde olduğundan fiziksel sınırları gösteren sınır şartları olmalıdır. Örneğin negatif (-) veya hayali (imaginary) ϕ 'nin hiçbir anlamı yoktur. Nötron akısı gerçek bir büyüklük olmalıdır ve hiçbir zaman negatif formda bir fonksiyon olamaz.

Difüzyon Denklemi Çözümünde Sınır Koşulları:

- Fick kanunu, bir ortam ile atmosfer arasındaki yüzeyde geçerli değildir. Ancak nötronlar bir ortamdan dışarı atmosfere difüz edebilirler. Küçük bir d mesafesinin ötesinde yüzeyde kaybolan nötron akısı fiziksel olarak anlamsız olacağından bu mesafe uzatılarak “ekstrapolasyon uzunluğu” denilen d parametresi tanımlanır.

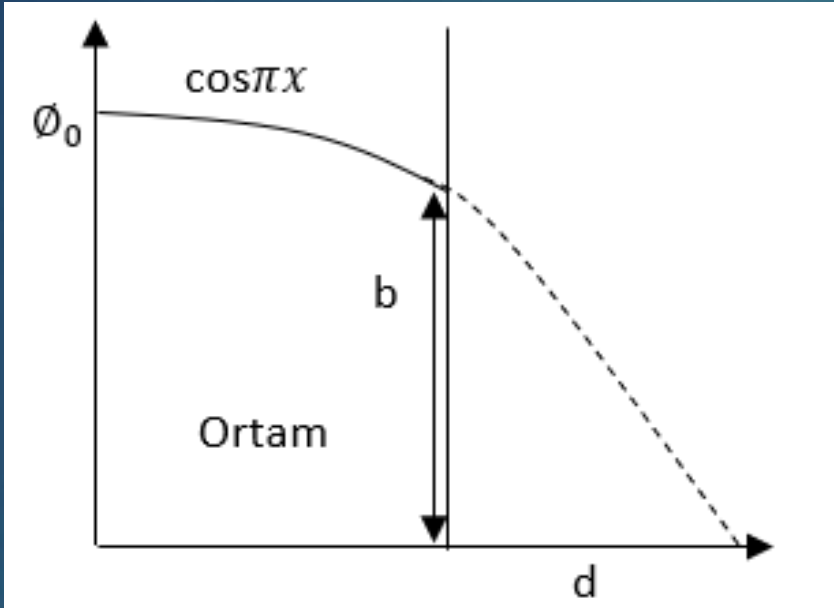
Ekstrapolasyon uzunluğu,



$$d = 0.71 \lambda_{tr}$$

$$\lambda_{tr} = 3D$$

$$d = 0.71 \cdot 3D = 2.13D \text{ olur.}$$



$$D\nabla^2\phi - \Sigma_a \cdot \phi + \Sigma_a \cdot \phi \cdot K_\infty = 0$$

veya

$$\nabla^2\phi - \frac{\phi}{L^2} = 0$$

Çözümü için 2 sınır şartı gereklidir.

Sonlu sistemlerde $\phi \rightarrow 0'$ a gider.

(Bu gerçek fiziksel boyuttan daha küçük mesafeler)

(1) nci sınır şartı: ϕ akısı her yerde sonlu ve simetriktir.

(2) nci sınır şartı: Sonsuz mesafelerde nötron akısı ϕ sıfıra gitmelidir. ($x \rightarrow \infty'$ a giderse $\phi \rightarrow 0'$ a olmalı)

Bu durum geçerli olması için $x \rightarrow \infty$ giderken herhangi bir dış kaynak olmaması gerekir.

Sonlu sistemler için $\phi \rightarrow 0$

$$\frac{-d\phi}{dx} = \frac{\phi}{d} \text{ (Akı eğrisinin eğimi)}$$

$$J_{-x} = \left(\frac{\phi}{4}\right) + \frac{D}{2} \frac{d\phi}{dx} = 0$$

veya

$$\frac{-d\phi}{dx} = \frac{\phi}{2D} \text{ olur}$$

Burada, $d = 2D = 2 \frac{\lambda_{tr}}{3}$ (d: uzatılmış mesafe-extrapolated distance)

Difüzyon katsayısının 2 katıdır.

Teoriye göre $d = 0.71\lambda_{tr}$

Örnek: D_2O moderatörlü reaktörde

$D(D_2O) = 0.767 \text{ cm}$ 'dir.

Tanım ve transport teorisine göre d –uzatılmış mesafe nedir?

Tanım göre; $d = 2D = 2 \times 0.767 = 1.534 \text{ cm}$

Transport teoriye göre; $d = 0.71\lambda_{tr} = 0.71 \times 3 \times 0.767 = 1.634 \text{ cm}$

Pratikte, gaz formunda olmayan malzemeler için ölçülen difüzyon katsayıları, genellikle 1cm'den azdır ($D < \text{cm}$). Ekstrapolasyon uzunluğu d ise, reaktör boyutları ile kıyaslandığında çok küçüktür. Bu yüzden, reaktörde difüzleyici ortamın yüzeyine geldiğinde, difüzyon denkleminde bulunan nötron akısı \emptyset ortadan kaybolur, yani sıfır olur. Bu yüzden, reaktörün gerçek fiziksel boyutuna bu d (ekstrapolasyon mesafesi) ilave edilir. Buna “vakum sınır şartı” adı verilir.

Örneğin: Fiziksel boyut a ise;

$$\tilde{a} = a + d$$

Akı bu mesafede kaybolur

İki bölge ara yüzeyinde:

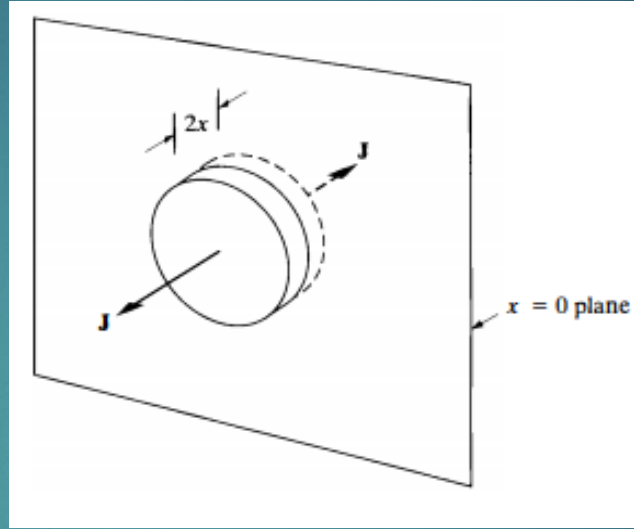
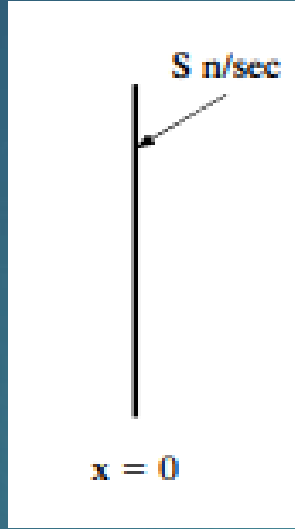
- Akının sürekliliği şartı: $\phi_A = \phi_B$
- Akımın sürekliliği şartı: $(J_A)_n = (J_B)_n$
- $-D_A \phi_A = -D_B \phi_B$ olmalıdır.

Ara yüzey sınır koşulları
(Interface Boundary
Conditions)

Burada A ve B bölgelerinin ara yüzeyinde nötron akımlarına ait vektörlerin dik bileşenleri $(J_A)_n$ ve $(J_B)_n$ ' dir.

Difüzyon Denkleminin Çözümleri

a) Sonsuz Düzlem Kaynak (Infinite Planar Source)



$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{4}{L^2} \phi = 0 \rightarrow x \neq 0 \text{ için}$$
$$\phi(x) = Ae^{-x/L} + Ce^{x/L}$$

A ve C sabittir.

C=0 olmalı (çünkü x arttıkça bu terim sonsuz büyür)

$$\phi(x) = Ae^{-x/L}$$

Şekildeki net nötron akısı $2J(x)$ olacaktır. Simetri problemi olduğundan $x \rightarrow 0$ ' a giderken, net akım S' e yaklaşır yani

$$\lim_{x \rightarrow 0} J(x) = \frac{S}{2}$$

(Buna kaynak şartı da denir)

Fick yasasından;

$$\vec{J} = -D \frac{d\phi}{dx} = -D \frac{d}{dx} A e^{-x/L} = + \frac{DA}{L} e^{-x/L}$$

Limit durumunda;

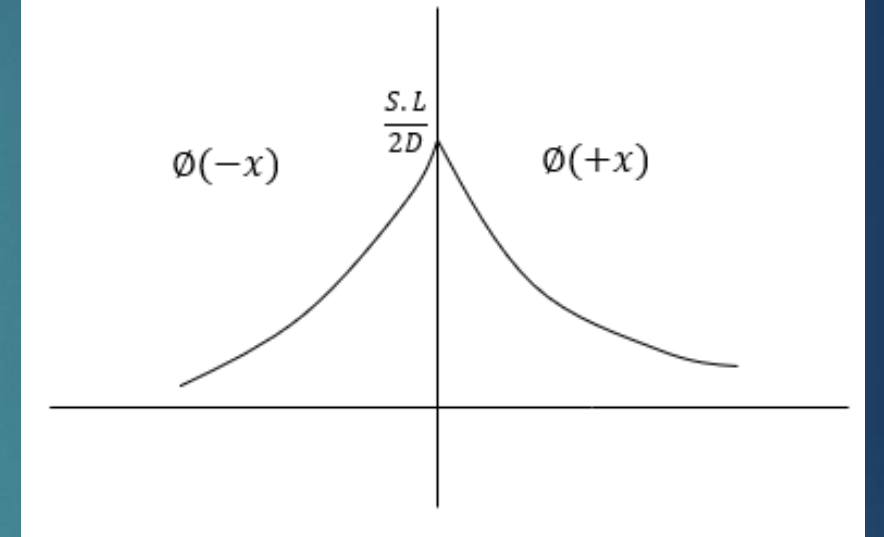
$$\frac{S}{2} = \frac{DA}{L} e^{-x/L}, \quad A = \frac{S.L}{2D} \text{ olur.}$$

O halde akı;

$$\phi = A e^{-x/L} = \frac{S.L}{2D} e^{-x/L}$$

Yüzeyin her iki tarafında akı olacağından;

$$\phi = \frac{S.L}{2D} e^{-|x|/L}$$



b) Nokta Kaynak

$\phi = \text{Sonlu olduğundan}$

$r \uparrow, C \rightarrow 0$ olmalı

$$\phi = A \frac{e^{-r/L}}{r}$$

$$J = -D \frac{d\phi}{dr} = DA \left(\frac{1}{rL} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-r/L}$$

$$\phi = \frac{S}{4\pi D} \frac{e^{-r/L}}{r} \text{ bulunur.}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\phi}{dr} - \frac{1}{L^2} \phi = 0$$

• Kaynak şartı; $\lim_{r \rightarrow 0} J(r)r^2 = \frac{S}{4\pi}$

$w = r: \phi$ değişken değişimi yapıldığında,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{L^2} w = 0$$

$$w = Ae^{-r/L} + Ce^{r/L}$$

$$\phi = A \frac{e^{-r/L}}{r} + C \frac{e^{r/L}}{r}$$

REFERANSLAR

- [1] <https://s4sscienceforstudents.files.wordpress.com/2014/07/beta-expr-rutherford.png>
- [2] M. Prelas, M.L. Watermann et al., (2014). A review of nuclear batteries
- [3] <https://www.britannica.com/science/nuclear-fission>
- [4] <https://www.nuclear-power.net/nuclear-power/fission/critical-energy-threshold-energy-for-fission/>
- [5] J. K. Dickens (13 May 2017). Fission Product Yields for Fast-Neutron Fission of $^{243,244,246,248}\text{Cm}$
- [6] <http://www.plux.co.uk/very-heavy-atoms-fission/>
- [7] Urszula Woźnicka (14 August 2018). Review of Neutron Diagnostics Based on Fission Reactions Induced by Fusion Neutrons
- [8] Fission process lecture notes. Michigan State University
- [9] J. O. Denschlag. Handbook of Nuclear Chemistry
- [10] N.Nahavandi, A.Minucmehr, A.Zolfaghari, M.Abbasi (2015). Spatially adaptive *hp* refinement approach for P_N neutron transport equation using spectral element method. Faculty of Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran
- [11] John R. Lamarsh, Anthony J. Baratta. Introduction to Nuclear Energy (3rd Edition)