ANKARA ÜNİVERSİTESİ

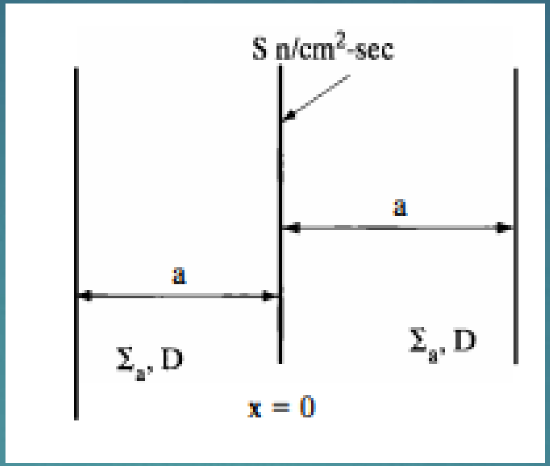
NÜKLEER BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

DİFÜZYON DENKLEMİ ÇÖZÜMÜNDE SINIR KOŞULLARI

İLERİ NÖTRON VE REAKTÖR FİZİĞİ

PROF. DR. HALUK YÜCEL

Sonsuz Yansıtıcısız Levha (Bare Slab) için Difüzyon Denklemi



Akı, yüzeylerden d kadar uzaklıkta (extrapolated distance) sıfıra yaklaşır.

Simetri Koşulları

$x \neq 0$ ve

$x \leq a$ için $\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x^2} - \frac{1}{L^2}\emptyset = 0$, $x = 0$ olur. (1)

O halde $\emptyset(a+d)=\emptyset(-a-d)=0$

Yarım sağ düzlem için (1) difüzyon denkleminin çözümü;

$\boxed{\emptyset(x)=Ae^{-x/L}+Ce^{x/L}}$ Genel çözüm

$x=a+d$ sınır koşulunda $\emptyset(a+d)=Ae^{-(a+d)/L}+Ce^{(a+d)/L}=0$

Buradan $C=-Ae^{-2(a+d)/L}$ yerine konulursa;

$$\emptyset(x)=A\left[e^{-x/L}-e^{-x/L-2(a+d)/L}\right]$$

Kaynak Şartı;

$$\lim_{x\longrightarrow 0} J(x) = \frac{S}{2}$$

$$J = -D\frac{d\emptyset}{dr} = -DA\frac{d}{dr}\left[e^{-x/L} - e^{-x/L-\frac{2(a+d)}{L}}\right] = \frac{S}{2}$$

$$A = \frac{SL}{2D}\left(1 + e^{-2(a+d)/L}\right)^{-1}$$

Pozitif x değerleri için:

$$\emptyset(x) = \frac{SL}{2D} \frac{e^{-x/L} - e^{-x/L - \frac{2(a+d)}{L}}}{1 + e^{-2(a+d)/L}}$$

çözümü bulunur.

Problem simetrik olduğundan tüm x'ler yerine $|x|$ konulur.

$$\emptyset(x) = \frac{SL}{2D} \frac{e^{-|x|/L} - e^{-|x|/L - \frac{2(a+d)}{L}}}{1 + e^{-2(a+d)/L}}$$

Bu çözümü daha uygun bir gösterimle ifade etmek gerektiğinde pay ve paydası $e^{(a+d)/L}$ ile çarpılır ve düzenlenirse;

$$\emptyset(x) = \frac{SL}{2D}\frac{e^{(a+d-|x|)/L} - e^{-(a+d-|x|)/L}}{e^{(a+d)/L} + e^{-(a+d)/L}}$$

$$= \frac{SL}{2D}\frac{Sinh[a+d-|x|/L]}{Cosh[(a+d)/L]}$$

$$Sinhx = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \quad ve \quad Coshx = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

Tek-Grup Reaktör Denklemi

$$D\nabla^2\emptyset - \Sigma_a.\emptyset + S = \frac{1}{v}\frac{\partial\emptyset}{\partial t} \qquad (1)$$

$$S = \nu\Sigma_f.\emptyset$$

Fisyon kaynağı, soğurulan ve reaktörden kaçan nötronları dengeleyemiyorsa, (1) denkleminin sağ tarafı sıfırdan farklı olur. Ancak dengelemek için kaynak terimini bir k sabiti ile böleriz. Kaynak gücü zayıf ise; $k < 1$, çok büyük ise; $k > 1$ olur.

Tek-Grup Reaktör Denklemi

$$D\nabla^2\phi - \Sigma_a.\phi + \frac{1}{k}\nu\Sigma_f.\phi = 0$$

Bu denklem $B^2 = \frac{1}{D}\left(\frac{1}{k}\nu\Sigma_f - \Sigma_a\right)$ bir öz değer tanımlanarak,

$$\nabla^2\phi = -B^2\phi$$

$$-DB^2\phi - \Sigma_a\phi + \frac{1}{k}\nu\Sigma_f.\phi = 0$$

veya

$$\nabla^2\phi + B^2\phi = 0$$

$$\nabla^2\emptyset + B^2\emptyset = 0$$

Bunun çözümünde;

$$k = \frac{\nu\Sigma_f . \emptyset}{DB^2\emptyset + \Sigma_a\emptyset} = \frac{\nu\Sigma_f}{DB^2 + \Sigma_a}$$

Tek grup reaktör denklem çözümünde

$B^2 = bilinmiyor$

Nükleer yakıt için kaynak terimi $S = \eta \frac{{\Sigma_a}^F}{\Sigma_a}\Sigma_a\emptyset = \eta f \Sigma_a\emptyset$

Burada yakıttan, $f = \frac{{\Sigma_a}^F}{\Sigma_a}\ (termal\ yararlanma)$

$\Sigma_a = mixture\ of\ fuel\ and\ coolant$

Sonsuz ortam; $k_\infty = \frac{\eta f \Sigma_a\emptyset}{\Sigma_a\emptyset} = \eta f$

η ve f faktörleri reaktördeki malzemelerin özelliklerine bağlı olduğu için çıplak (bare) reaktörlerde k_∞ değeri, aynı malzeme bileşenine sahip sonsuz reaktörle aynı olacaktır.

Yani kaynak terimi; $S = \eta \frac{{\Sigma_a}^F}{\Sigma_a} \Sigma_a \emptyset = \eta f \Sigma_a \emptyset$ terimi yerine, $S = k_\infty \Sigma_a \emptyset$ yazılabilir.

Bu Tek – gruplu reaktör denklemine $\nabla^2\emptyset = -B^2\emptyset$ ve $S = k_\infty \Sigma_a \emptyset$ ifadeleri konulursa,

$$-DB^2\emptyset - \Sigma_a\emptyset + \frac{k_\infty}{k}\Sigma_a\emptyset = -\frac{1}{v}\frac{\partial\emptyset}{\partial t}$$

Şayet reaktör kritik durumdaysa $k = 1$ alınır ve sağ taraf sıfırdır.

$$-DB^2\emptyset - \Sigma_a\emptyset + \frac{k_\infty}{k}\Sigma_a\emptyset = 0$$

$$-DB^2\emptyset + (k_\infty - 1)\Sigma_a\emptyset = 0$$

$$-DB^2\emptyset - \Sigma_a\emptyset + \frac{k_\infty}{k}\Sigma_a\emptyset = 0$$

$$-DB^2\emptyset + (k_\infty - 1)\Sigma_a\emptyset = 0$$

Her iki tarafı D ile bölersek,

$$-B^2\emptyset + \frac{(k_\infty - 1)}{L^2}\emptyset = 0$$

$$B^2 = \frac{(k_\infty - 1)}{L^2}$$

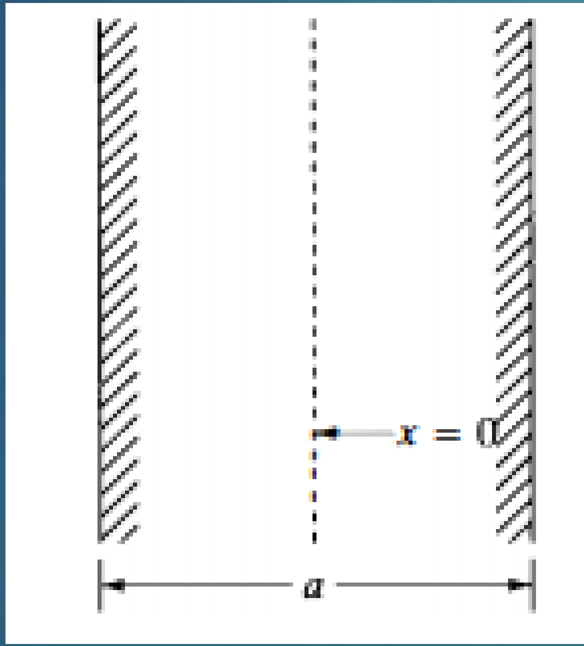
burada $L^2 = \frac{D}{\Sigma_a}$'dır.

B^2 kritik reaktör için akı bükülmesi (Buckling) olarak adlandırılır.

Soru:

Slab reaktör için Tek-grup difüzyon denklemi nedir? Reaktörün kritik olacağı varsayılır.

$$\frac{d^2\emptyset}{dx^2} + B^2\emptyset = 0$$



$d =$ Ekstrapolasyon mesafesi

$$\emptyset\left(\frac{d}{2}\right) = \emptyset\left(-\frac{d}{2}\right) = 0$$

$$\frac{d\emptyset}{dx} = 0$$

$x = 0$ da $\emptyset(-x) = \emptyset(x)$

$$\emptyset(x) = AcosBx + CsinBx$$

$$\frac{d\emptyset}{dx} = -\frac{d}{dx}(AcosBx + CsinBx) = 0$$

- Türevi $x = 0$' da $C = 0$ olmasını gerekir.
- O halde, $\emptyset(x) = AcosBx$

$$\emptyset\left(\frac{d}{2}\right) = Acos\left(\frac{Bd}{2}\right) = 0$$

Bu ancak ya $A = 0$

veya $cos\left(\frac{Bd}{2}\right) = 0$ koşullarında geçerlidir.

- B' nin herhangi bir değeri B_n;

$B_n = \frac{\pi n}{d}$ olur.

$$\emptyset(x) = AcosB_1x = Acos\frac{\pi}{d}x$$

${B_1}^2 =$ Buckling

$$\frac{d^2\emptyset}{dx^2} + B^2\emptyset = 0$$

$${B_1}^2 = -\frac{1}{\emptyset}\frac{d^2\emptyset}{dx^2}$$

$${B_1}^2 = \left(\frac{\pi}{d}\right)^2$$

Çoğaltma Faktörü

$$k_\infty = \eta f \epsilon p$$

$$\eta = \frac{\nu \sigma_f}{\sigma_f + \sigma_\gamma}$$

p =Rezonanstan kaçma olasılığı

ϵ =Hızlı fisyon katsayısı

f =Termal yararlanma faktörü $f = \frac{N^{235}{\sigma_A}^{235} + N^{238}{\sigma_A}^{238}}{\Sigma N_i {\sigma_A}^i}$

	$\sigma_f(b)$	$\sigma_\gamma(b)$	ν	η
^{233}U	527	69	2.51	2.29
^{235}U	590	108	2.47	2.08
Nat. U	-	-	2.47	1.33
^{239}Pu	729	300	2.91	2.08

$$k = \eta f \epsilon p(1 - l_f)(1 - l_s)$$
$$k = k_\infty(1 - l_f)(1 - l_s)$$

l_f = Hızlı nötronların sızması

l_s = Yavaş nötronların sızmasını gösteren katsayılar

- Yakıt içerisinde ikinci nesil nötronların sayısı;

$$k.N = k_\infty\left(1 - l_f\right)(1 - l_s).N$$

$t_0\ (\sim 1 - 2ms)$: Bir nötronun üremesi ile soğurulması arasında geçen zaman

Nötronların her silsilesi için yani reaktördeki nötron yoğunluğu ρ, her t_0 zaman aralığında $(k-1)\rho$ kadar artırılır. Bu nedenle nötron yoğunluğunun zamanla değişim hızı;

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{(k-1)\rho}{t_0}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{(k-1)\rho}{t_0}$$

Çözümü;

$$\frac{d\rho}{\rho} = \int_0^t \frac{(k-1)\rho}{t_0} dt$$

$$\rho(t) = e^{\frac{(k-1)}{t_0}t} = e^{\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = \frac{t_0}{k-1}$$

$$\rho(t) \sim \emptyset(t) \sim P(t)$$

Nötron yoğunluğu Akı Güç yoğunluğu

Misal, $k = 1.01$ için

$$\tau(Zaman\ Sabiti) = \frac{t_0}{k-1} = \frac{1ms}{1.01-1} = 0.1s$$

REFERANSLAR

[1] https://s4sscienceforstudents.files.wordpress.com/2014/07/beta-expr-rutherford.png

[2] M. Prelas, M.L. Watermann et al., (2014). A review of nuclear batteries

[3] https://www.britannica.com/science/nuclear-fission

[4] https://www.nuclear-power.net/nuclear-power/fission/critical-energy-threshold-energy-for-fission/

[5] J. K. Dickens (13 May 2017). Fission Product Yields for Fast-Neutron Fission of $^{243,244,246,248}Cm$

[6] http://www.plux.co.uk/very-heavy-atoms-fission/

[7] Urszula Woźnicka (14 August 2018). Review of Neutron Diagnostics Based on Fission Reactions Induced by Fusion Neutrons

[8] Fission process lecture notes. Michigan State University

[9] J. O. Denschlag. Handbook of Nuclear Chemistry

[10] N.Nahavandi, A.Minuchehr, A.Zolfaghari, M.Abbasi (2015). Spatially adaptive *hp* refinement approach for P_N neutron transport equation using spectral element method. Faculty of Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

[11] John R. Lamarsh, Anthony J. Baratta. Introduction to Nuclear Energy (3rd Edition)