Optimizasyon her şeyi daha iyi yapmakla ilgilidir; Bu, bir şirketin kazancını en üst düzeye çıkarmak için daha iyi kararlar vermesine yardımcı olmak anlamına gelebileceği gibi; bir fabrikanın daha az çevresel etkiye sahip ürünler üretmesine yardımcı olmak; ya da bir zoologun bir hayvanın diyetini iyileştirmesine yardım etmek anlamına da gelebilir. Optimizasyondan bahsettiğimizde sıklıkla “daha iyi” veya “iyileştirme” gibi terimler kullanırız. “Daha iyi” gibi kelimelerin bazı durumlarda (kâr) fazlalığı bazı durumlarda da (örneğin çöp-atık) azlığı temsil edeceğini hatırlamak önemlidir. Başka bir ifadeyle en iyi kazançta kazancın maksimum olması beklenirken, en iyi atıkta atığın minimum olması hedeflenir. Doğrusal programlama dersinde bu kavramlara matematiksel açıdan değinilecektir.

Şimdilik, bir şeyi optimize ettiğimizde onu bir şekilde “daha iyi” (daha az ya da daha fazla) hale getirecek bazı kararlar almaya çalıştığımız konusunda hemfikir olalım.

**Örnek 1.** Basit bir optimizasyon problemini göz önüne alalım: Keçi, bir sürü kayanın veya çok sayıda tepenin bulunduğu bir çimin kontrol edilmesi için çevre dostu ve ucuz bir yoldur. (Gerçekten de hem Google hem de ABD'deki bazı Deniz Kuvvetleri üsleri kayalık tepelerde çim biçme makinesine para ödemek yerine keçileri kullanıyor!)

Keçileri saklamak için bir kümes inşa etmek istediğimizi varsayalım. 100 metre çitimiz var ve kümesi mümkün olan en geniş alana sahip bir dikdörtgende inşa etmek istiyoruz. Dikdörtgenin kenarları ne kadar olmalı? Bu durumda kümesin "daha iyi" olması, mümkün olan en geniş alana sahip olmasını ifade eder.

x

Keçi Kümes’i

 y

$2x+2y=100$ (1)

olduğu açıktır. (Çünkü kümesin çevre uzunluğu 2x+2y olup kümesi oluşturmak için 100 metre çitimiz mevcuttur.) Dikdörtgenin alanı

$A(x,y)=xy$ dir. (2)

(1) den y, x cinsinden çekilir ve (2)’de yerine yazılırsa

$A(x)=x(50-x)$ (3)

$A(x)$’i maksimum yapmak için $x$’e gore birinci türevini hatırlayalım, ve bu türevi sıfıra eşitleyip $x$’i çözelim;

$\frac{dA}{dx}$ $=50-2x=0$;

Böylece $x=25$ ve $y=50-x=25$ olarak elde edilir. Analizden, bu noktanın maksimum olmasını nasıl doğrulayacağımızı hatırlayalım;

$\frac{d^{2}A}{dx^{2}}$ $=-2<0$ (4)

ki bu da x=25’in bu fonksiyon için bir yerel maksimum olduğunu belirtir. (Bunu hatırlamanın başka bir yolunun da A(x)’in kolları aşağı doğru olan bir parabol olduğunu belirtelim.)

Sonuç olarak tahmin edebileceğimiz gibi, keçileri tutacak maksimum alan bir karedir.

Şimdi Örnek 1’deki keçi kümesine daha geniş bir açıdan bakalım; Alan fonksiyonu $R^{2}$den $R$’ye bir dönüşüm olup, $A:R^{2}\rightarrow R$ şeklinde yazılır. A’nın tanım kümesi $R^{2}$ olup değer kümesi de $R$’dir. Örnek 1’de amacımız, x ve y değerlerini seçerek A(x)’i maksimum yapmaktır. Optimizasyon teorisinde maksimum (veya minimum) yapmak istediğimiz fonksiyona ***Amaç (objektif-objective) Fonksiyonu*** adı verilir. Genel olarak amaç fonksiyonu; $z:D⊆R^{n}\rightarrow R$ şeklinde bir dönüşümdür. Burada $D, z$’nin tanım kümesidir.

**Tanım:** $z:D⊆R^{n}\rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. Eğer $∀x\in D$ için $z(x^{\*})\geq z(x)$ olacak şekilde bir $x^{\*}$ noktası varsa, bu noktaya $z$ için bir **mutlak maksimum**’dur denir. Eğer $∀x\in S$ için $z(x^{\*})\geq z(x)$ olacak şekilde $x^{\*}$’ın bir $S⊆D$ (başka bir deyişle$ x^{\*}\in S)$ komşuluğu varsa, bu noktaya da $z$ için bir **yerel maksimum**’dur denir.

**Uyarı:** Yukarıdaki tanımın, komşuluk kavramının açık ve tanımlı olduğu fnksiyonlar ve tanım kümeleri için geçerli olduğu açıktır. Genelde, S, bu tanımın kullanılabilmesi için topolojik olarak bağlantılı bir küme ($R^{n}$ deki bir komşulukta olduğu gibi) ya da en azından üzerinde komşuluk kavramının tanımlanabildiği bir küme olmalıdır.

Örnek 1’deki $x$ ve $y$’nin seçimleri $2x+2y=100$ ile kısıtlanmaktadır. Buna optimizasyon problemi için bir ***kısıt (constraint)*** adı verilir. Daha da özel olarak, bu bir ***eşitlik kısıtlaması***’dır. Eğer bütün çiti kullanmak zorunda olmasaydık, bu durumda kısıtlama $2x+2y\leq 100$ şeklinde yazılabilecekti. Bu ise bir ***eşitsizlik kısıtlaması***’dır. Karmaşık optimizasyon problemlerinde bir çok kısıtımız olabilmektedir. Kısıtlamaların doğru olduğu $R^{n}$ 'deki tüm noktaların kümesi, ***uygun küme*** (veya ***uygulanabilir bölge-feasable set***) olarak adlandırılır. Bizim problemimiz $A (x; y)$ alanını maksimize etmek için en iyi $x$ ve $y$ değerlerine ***karar vermektir***. $x$ ve $y$ değişkenlerine ***karar değişkenleri (decision varibles)*** denir.

$z:D⊆R^{n}\rightarrow R$, $g\_{i}:D⊆R^{n}\rightarrow R;$ $i=1,..,m$ ve $j=1,..,l $için $h\_{j}:D⊆R^{n}\rightarrow R$

şeklinde fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda $z\left(x\_{1},..,x\_{n}\right)$amaç fonksiyonu, $g\_{i}\left(x\_{1},..,x\_{n}\right)\leq b\_{i}$ (i=1,…,m) eşitsizlik kısıtları ve $h\_{j}\left(x\_{1},..,x\_{n}\right)=r\_{j} (j\_{1},…,l) $için genel maksimumlaştırma problemi

$$\left(5\right) \left\{\begin{array}{c}maks z\left(x\_{1},..,x\_{n}\right)\\g\_{1}\left(x\_{1},..,x\_{n}\right)\leq b\_{1}\\\vdots \\g\_{m}\left(x\_{1},..,x\_{n}\right)\leq b\_{m}\\h\_{1}\left(x\_{1},..,x\_{n}\right)=r\_{1}\\\vdots \\h\_{l}\left(x\_{1},..,x\_{n}\right)=r\_{l}\end{array}\right.$$

biçimindedir. (5) gösterimi aynı zamanda bir ***matematiksel programlama problemi*** olarak da adlandırılır. Doğal olarak kısıtlamalar dahil olduğunda, sadece kısıtlarımıza uygun olan $x\_{1},..,x\_{n}$ değerleriyle ilgilendiğimizden, z’nin bütün tanım bölgesi yerine uygulanabilir bölgesi üzerinden $z\left(x\_{1},..,x\_{n}\right)$ amaç fonksiyonu için global ve yerel maksimum tanımlarız.

Yukarıdaki gösterim doğrultusunda Örnek 1’i yeniden aşağıdaki şekilde düzenleyebiliriz;

$$ \left\{\begin{array}{c}maks A\left(x,y\right)=xy\\2x+2y=100\\x\geq 0\\y\geq 0\end{array}\right. $$

Uzunluk negatif olamayacağından $x\geq 0, y\geq 0$ koşullarının eklendiğine dikkat edelim. Diğer taraftan $g\_{1}\left(x,y\right)=-x\leq 0, g\_{2}\left(x,y\right)=-y\leq 0$ alınarak yukarıdaki problemin (5)’in bir özel durumu olduğu açıkça görülebilir.