**Doğrusal Programlama Problemi:**

Doğrusal bir programlama problemi, doğrusal kısıtlamalara tabi yine doğrusal olan amaç fonksiyonun maksimize edilmesi veya minimize edilmesi problemi olarak tanımlanabilir. Kısıtlamalar eşitlikler veya eşitsizlikler şeklinde olabilir.

**Tanım:** (5) açılımında amaç fonksiyonu ve tüm kısıtların lineer-doğrusalolması durumunda optimizasyon problemine bir ***doğrusal programlama problemi*** adı verilir. Genel formu aşağıdaki şekildedir;

$c\in R^{n}, b\in R^{m}, r\in R^{l}, A\in R^{mxn}, H\in R^{lxn} $ve $x\in R^{n}$ olmak üzere;

$$maks z\left(x\_{1},…,x\_{n}\right)=c^{T}x=c\_{1}x\_{1}+…+c\_{n}x\_{n}$$

$$a\_{11}x\_{1}+a\_{12}x\_{2}+…+a\_{1n}x\_{n}\leq b\_{1}$$

$$a\_{21}x\_{1}+a\_{22}x\_{2}+…+a\_{2n}x\_{n}\leq b\_{2}$$

$\vdots $ (2.1)

$$a\_{m1}x\_{1}+a\_{m2}x\_{2}+…+a\_{mn}x\_{n}\leq b\_{m}$$

$$h\_{11}x\_{1}+a\_{12}x\_{2}+…+h\_{1n}x\_{n}=r\_{1}$$

$$h\_{21}x\_{1}+h\_{22}x\_{2}+…+h\_{2n}x\_{n}=r\_{2}$$

$$\vdots $$

$$h\_{l1}x\_{1}+h\_{l2}x\_{2}+…+h\_{ln}x\_{n}=r\_{l}$$

(ya da kısaca $Ax\leq b, Hx=r$) ve,

 $x\_{1}\geq 0, x\_{2}\geq 0,…,x\_{n}\geq 0$ (ya da $x\geq 0)$

**Tanım (Lineer Fonksiyon):** Eğer $z=c\_{1}x\_{1}+…+c\_{n}x\_{n}$ olacak şekilde $c\_{1},…,c\_{n}\in R$ sabitleri varsa $z:R^{n}\rightarrow R$ fonksiyonuna doğrusal (lineer) fonksiyon adı verilir.

**Lemma :** $z:R^{n}\rightarrow R$ fonksiyonu doğrusal (lineer) ise bu durumda her $x\_{1}, x\_{2}\in R^{n}$ ve her $αϵR$ sabiti için

(i) $z\left(x\_{1}+ x\_{2}\right)=z\left(x\_{1}\right)+z(x\_{2})$

(ii) $z\left(αx\_{1}\right)=αz\left(x\_{1}\right)$

dir.

**Not:** Genel olarak bir $z\left(x\_{1},…,x\_{n}\right)$ fonksiyonu minimize etmek demek -$ z\left(x\_{1},…,x\_{n}\right)$ ‘yi maksimum yapmaktan başka birşey değildir!

Şimdi basit bir örnek ele alalım;

**Örnek.** $x\_{1}+x\_{2}$ toplamını aşağıdaki kısıtlamalarla maksimum yapan $x\_{1}, x\_{2}$ sayılarını bulunuz;

$$x\_{1}\geq 0, x\_{2}\geq 0$$

ve

$$x\_{1}+2x\_{2}\leq 4$$

$$4x\_{1}+2x\_{2}\leq 12$$

$$-x\_{1}+x\_{2}\leq 1$$

Bu problemde iki bilinmeyen ve 5 kısıtlama vardır. Bu kısıtlamaların tümü eşitsizlik şeklinde olup, her biri değişkenlerin bazı doğrusal fonksiyonlarında eşitsizliği içerdiği anlamıyla doğrusaldır. İlk iki kısıtlama

$x\_{1}\geq 0, x\_{2}\geq 0$ ‘dır.

Bunlar “negatif olmama (non-negative) şartı” olarak adlandırılırlar ve doğrusal programlama problemlerinde sıklıkla bulunurlar. Diğer kısıtlamalar ise “temel kısıtlar” adını alırlar.

Maksimum (ya da minimum) yapılmak istenen fonksiyona (objective function) amaç fonksiyonu adı verilir. Burada amaç fonksiyonu;

x1 + x2

dir.

Sadece iki değişken olduğundan, bu problem bütün kısıtlamaların sağlandığı düzlemde noktalar kümesinin belirlenmesi yardımıyla çözülebilir ve böylece bu kümenin hangi noktasının amaç fonksiyonunu maksimum yaptığı bulunabilir. Herbir eşitsizlik kısıtı noktaların bir yarı düzlemiyle belirlidir ve kısıt kümesi tüm bu yarı düzlemlerin arakesitidir. Bu örnekteki kısıt kümesi Şekil 2 deki gibi 5 kenarlı bir bölgedir.



 Şekil 2. Uygun küme.

Bu kısıt kümesi üzerinde $x1 +x2 $ değerini maksimum yapacak $(x1, x2)$ noktasını araştıralım. $x1 + x2$ fonksiyonu -1 eğimli doğrular üzerinde sabittir; örneğin $x1 + x2 = 1$, ve biz bu doğruyu orjinden uzaklaştırıp sağ tarafa doğru hareket ettirirsek $x1 + x2$ değeri artar. Bu yüzden orjinden en uzakta ve yine de kısıt kümesine dokunan -1 eğimli doğruyu arıyoruz. Bu

$x1 +2x2 = 4$ ve $4x1 +2x2 = 12$

doğrularının kesim noktasında olur, yani, $(x1, x2) = (8/3, 2/3)$’dir. Böylece amaç fonksiyonunun maksimum değeri (8/3) + (2/3) = 10/3’dür.

Doğrusal programlama problemleri genellikle kolay çözülebilir değillerdir. Bir çok değişken ve bir çok kısıtlama olabilir. Bazı değişkenlerde negatif olmama şartı varken diğerlerinde kısıt olmayabilir. Temel kısıtların bir kısmı eşitlik biçiminde iken diğerleri eşitsizlik biçiminde olabilir.

**Örnek 2.1:** Oyuncak uçakve oyuncak tekne üreten bir oyuncak şirketini göz önüne alalım. Oyuncak şirketi, uçaklarını 10₺ ve teknelerini 8₺ karşılığında satabilmektedir. Bir uçak yapmak için gerekli hammaddenin maliyeti 3₺ iken bir tekne yapmak için hammadde maliyeti 2₺ ’dır. Bir uçak yapımı için 3 saat ve bitimi için 1 saat gerekirken, bir teknenin yapımı için 1 saat ve bitimi için de 2 saat gerekmektedir. Oyuncak şirketi, haftada 35'ten fazla uçak satmayacağını biliyor. Ayrıca, çalışan sayısı göz önüne alındığında, şirket oyuncakları bitirmek için haftada 160 saatten fazla, yapmak için de 120 saatten fazla zaman harcamayamamaktadır. Şirket haftalık ne kadar oyuncak üretimi ile kârını maksimum yapabileceğini öğrenmek istemektedir.

**Çözüm:** Yukarıdaki bir şirketin “maksimum kâr problemi” bir doğrusal programlama problemi olarak ifade edilebilir. Şimdi şirketin üreteceği uçak sayısı; $x\_{1}$ ve tekne sayısı da $x\_{2}$ olsun. Her bir uçağın kârı= 10-3=7 ₺ iken teknenin birim kârı da 8-2=6 ₺ dir. Böylece şirketin toplam kârı;

$$z\left(x\_{1},x\_{2}\right)=7x\_{1}+6x\_{2}$$

dir. Uçak yapımı için gereken süre 3 saat ve tekne yapımı için gereken sure 1 saat olup şirket oyuncak yapımı için 120 saatten fazla zaman harcayamayacaksa;

$$3x\_{1}+x\_{2}\leq 120$$

dir. Benzer olarak uçağın bitimi için 1 saat ve teknenin bitimi için 2 saat gerekmekte ve şirketin oyuncakları bitirmek için 160 saatten fazla süresi olmadığına gore;

$$x\_{1}+2x\_{2}\leq 160$$

Son olarak $x\_{1}\leq 35$ olmalıdır çünkü şirket haftada 35den fazla uçak satamamaktadır.

Buna gore sözü edilen doğrusal programlama problemi aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$Maks z\left(x\_{1},x\_{2}\right)=7x\_{1}+6x\_{2}$$

$$3x\_{1}+x\_{2}\leq 120$$

$$x\_{1}+2x\_{2}\leq 160$$

$$x\_{1}\leq 35$$

$$x\_{1}\geq 0$$

$$x\_{2}\geq 0$$