Önceki problemde amaç fonksiyonunu değiştirelim;

**Örnek 6.** $Maks z\left(x\_{1},x\_{2}\right)=\frac{1}{2}x\_{1}-x\_{2}$

$$x\_{1}-x\_{2}\leq 1$$

$$2x\_{1}+x\_{2}\geq 6$$

$$x\_{1}\geq 0, x\_{2}\geq 0$$

için uygunluk kümesi ve amaç fonksiyonun seviye eğrileri aşağıdaki şekildeki gibidir;

Bu durumda, amaç fonksiyonunun artış yönü uygunluk bölgesinin sınırsız olduğu yönün aksine doğru hareket etmektedir. Bunun sonucu olarak en büyük $z\left(x\_{1},x\_{2}\right)$ değeri $x\_{1}-x\_{2}=1$, $2x\_{1}+x\_{2}=6$ doğrularının kesim noktası olan (7/3, 4/3)’de alınacaktır.



Son iki örnek göz önüne alındığında iki değişkenli DP problemlerini grafiksel çözmek için algoritmamızı aşağıdaki gibi yeniden düzenlemeliyiz;

….

**Örnek 7:** Aşağıdaki problem sınırlı bir çözüme sahip midir? Neden?

$$Min z\left(x\_{1},x\_{2}\right)=2x\_{1}-x\_{2}$$

$$x\_{1}-x\_{2}\leq 1$$

$$2x\_{1}+x\_{2}\geq 6$$

$$x\_{1}\geq 0, x\_{2}\geq 0$$

Örnek 5’in grafiğine ve yukarıdaki algoritmaya bakınız.

**Soru:** Örnek 5 ve Örnek 6’nın amaç fonksiyonlarını sonsuz çözüm olacak şekilde yeniden düzenleyiniz.

**Soru:** Örnek 7’de amaç fonksiyonunu sonlu çözümlü bir minimumlaştırma problem olacak şekilde düzenleyiniz. Seviye eğrilerinin ve uygunluk bölgesinini grafiklerini çiziniz.

**GEOMETRI-CEBIR-MATRIS**

Optimizasyon teorisinde Öklid uzay geometrisi iyi bilinmesi gereken bir alandır. Burada $xϵR^{n}, x=(x\_{1},…,x\_{n})$ n-boyutlu vektör olarak temsil edilecektir. Analiz ve Cebirden bazı hatırlatmalar faydalı olacaktır.

**Tanım (İç Çarpım):** $x,y ϵR^{n}$ iki n-boyutlu vector olsunlar. Bu durumda bu vektörlerin iç çarpımı;

$$x.y=\sum\_{i=1}^{n}x\_{i}y\_{i}$$

ile yanımlıdır. Burada $x\_{i}$ x vektörünün i-yinci bileşenidir.

Diğer bir altrenatif tanım da x ve y vektörleri arasındaki açı $θ$ olmak üzere $x.y=\left‖x\right‖\left‖y\right‖Cosθ$ ‘dir. Bu kural trigonometriden Kosinüs kuralı ile elde edilebilir.

**Tanım (Grafik):** $z:D⊆R^{n}\rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda z’nin grafiği

$$\left\{\left(x,z\left(x\right)\right)\in R^{n+1}\left|xϵD\right. \right\}$$

noktalarının kümesidir.

**Tanım (Seviye Kümesi)**: $z:R^{n}\rightarrow R$ bir fonksiyon ve $cϵR$ olsun. Z fonksiyonu için c değerinin seviye kümesi;

$$\left\{x=(x\_{1},…,x\_{n})\in R^{n}\left|z\left(x\right)=c\right. \right\}⊆R^{n}$$

şeklindeki kümedir.

**Örnek:** $z=x^{2}+y^{2}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. z’nin 4’deki seviye kümesi $x^{2}+y^{2}=4 $ olacak şekildeki $\left(x,y\right)ϵR^{2}$ noktalarının kümesidir. Bunun 42 yarıçaplı bir çember denklemi olduğu görülebilir.



**Şekil 1**. z’nin grafiği üzerinde seviye kümeleri. z’nin grafiği $R^{3}$de iken seviye kümelerinin grafikleri $R^{2}$’dir.

Yukarıdaki şekilde fonksiyonun 3 boyutlu uzayda grafiği ve seviye kümeleri görülmektedir. Diğer taraftan aşağıdaki grafikte ise $R^{2}$’de seviye kümeleri görülebilir. Bu grafik Kontur Grafiği (Contour Plot) adını alır.



**Şekil 2**. $z=x^{2}+y^{2}$ nin kontur grafiği.

**Tanım (Doğru):** $x\_{0}, v ϵR^{n}$ olsun. $x\_{0}, v$ vektörleri ile tanımlı $l$ doğrusunun denklemi

 $l\left(t\right)=x\_{0}+tv$ ile verilir. Burada açıkça, $l:R⟶R^{n} $ bir fonksiyondur ve $v$’ye de doğrunun doğrultman vektörü adı verilir.

**Örnek.** $x\_{0}=\left(2,1\right), v=(2,2)$olsun. $x\_{0}$ ve $v$ ile tanımlanan doğrunun üzerindeki noktalar kümesi $L=\left\{\left(x,y\right)ϵR^{2}\left|x=2t+2, y=2t+1, tϵR\right.\right\}$’dir. Grafiğini çiziniz.

**Tanım (Yönlü Türev):** $z:R^{n}\rightarrow R , vϵR^{n}$ bir (yönlü) vektör olsun. Bu durumda $z$’nin $x\_{0}ϵR^{n}$ noktasında $v$ yönündeki yönlü türevi eğer varsa $\frac{d}{dt}z\left(x\_{0}+tv\right)\left| \right.\_{t=0}$ dır.

**Lemma:** $z$’nin $x\_{0}ϵR^{n}$’de $v$ yönündeki yönlü türevi

$$\lim\_{h\to 0}\frac{z\left(x\_{0}+hv\right)-z(x\_{0})}{h}$$

‘a eşittir.

Örnek: $f(x,y)$nin birim $u=(a,b)$ vektörü yönündeki türevi;

$$D\_{u}f\left(x,y\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+ah,y+bh\right)-f(x,y)}{h}$$