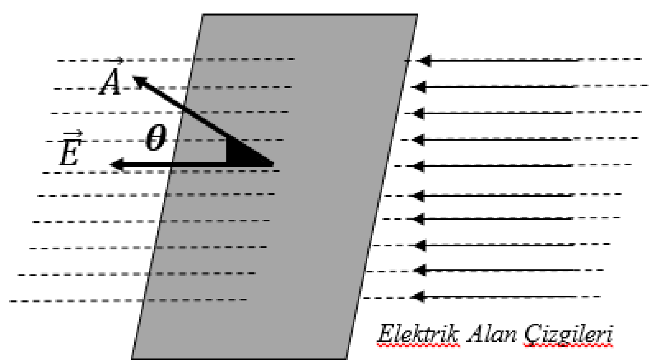
5. Hafta: Elektrik Akısı ve Gauss Yasası

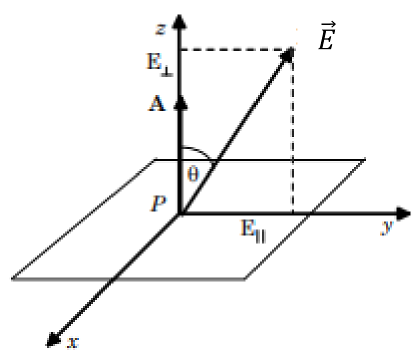
- Elektrik alan Coulomb yasası ile orantılıdır. Önceki bölümde sürekli bir yük dağılımının elektrik alanını belirlemenin bazı yük dağılımları için çok karmaşık olabileceğini gördük.
- Bu bölümde, Coulomb yasasını ifade etmek, bir yük dağılımının elektrik alanını belirlemek için daha basit bir yol arıyoruz.
- Yük dağılımında belli bir simetri varsa, Gauss yasasıyla elektrik alanını tespit etmenin mümkün olduğu görülmüştür.
- Gauss yasasını anlamak ve Gauss yasası ile elektrik alanı belirlemek için önce elektrik akısı kavramını anlamamız gereklidir.

Elektrik Akısı:

Akı, yüzeye dik olarak geçen elektrik alan çizgilerinin sayısının niceliksel bir ölçüsüdür. Düzlemsel bir alandan geçen elektrik akısı, elektrik alan ile yüzeyin alanına eşit büyüklükte olan yüzeyin normali olarak da adlandırabileceğimiz $\vec{A}$ vektörünün çarpımına eşittir.

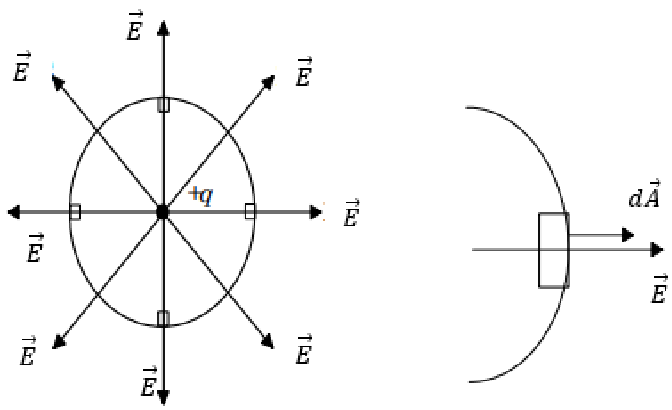


Şekil 3.1 Elektrik Akısı



$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} \tag{3.1}$$
$$\Phi = EA\, cos\Theta$$

- Elektrik alanın çizgilerinin yoğunluğu, elektrik alanın şiddeti ile orantılı olduğu söylenmişti. Yukarıdaki ifadeden görülebileceği gibi elektrik akısı elektrik alan ile doğru orantılıdır.
- Bir elektrik akısının bir alandan geçen elektrik alan çizgilerinin sayısıdır.
- Şimdi pozitif noktadan kaynaklanan elektrik akı miktarını düşünelim.



Şekil 3.2 Bir Nokta Yükün Elektrik Akısı

- Şekil 3.2, Gaussian yüzey denilen hayali bir küresel yüzeyle çevrili bir pozitif nokta yükünü göstermektedir. Küre içindeki elektrik akı miktarını ölçelim. E alanının yönü her noktada farklıdır,
- bununla birlikte, denklem 3.1 bu haliyle kullanılamaz.

Yüzey çok sayıda sonsuz dA küçük yüzey alanına bölünür ve bu sonsuz küçük alanların $d\Phi$ akısı hesaplanır:

$$d\Phi_{\mathrm{E}} = \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Gaussiyen yüzeyin toplam akısı, sonsuz küçük dA alanlarına karşılık gelen sonsuz küçük $d\Phi_{\mathrm{E}}$ lerin toplamına dönüşür:

$$\Phi_{\mathrm{E}} = \oint d\Phi_{\mathrm{E}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Kapalı integral ifadesi, toplamın akının geçtiği tüm kapalı yüzey boyunca gerçekleştirildiğini gösterir.

$$\Phi_{\mathrm{E}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E\, dA\ cos\theta = \oint E\, dA\ cos0$$

$$\Phi_{\mathrm{E}} = \oint E\, dA$$

Bir nokta yükün elektrik alanı daha öncesinde $E = k\frac{q}{r^2}$ olarak verildiğini biliyoruz. Bu ifadeyi akının tanımında yerine koyduğumuzda küresel yüzey boyunca olan elektrik akısının ifadesine ulaşılır. Bu ifade de k ve q nun sabit olduğu göz önüne alınıp dışarı çıkarılırsa,

$$\Phi_\mathrm{E} = \oint k\frac{q}{r^2}dA = k\frac{q}{r^2}\oint dA.$$

Burada dA yüzey elemanlarının integrali kürenin yüzey alanına $\oint dA = 4\pi r^2$ eşittir. Böylece bir nokta yükten kaynaklanan elektrik akısı,

$$\Phi_\mathrm{E} = \mathrm{k}\frac{q}{r^2}\,4\pi r^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

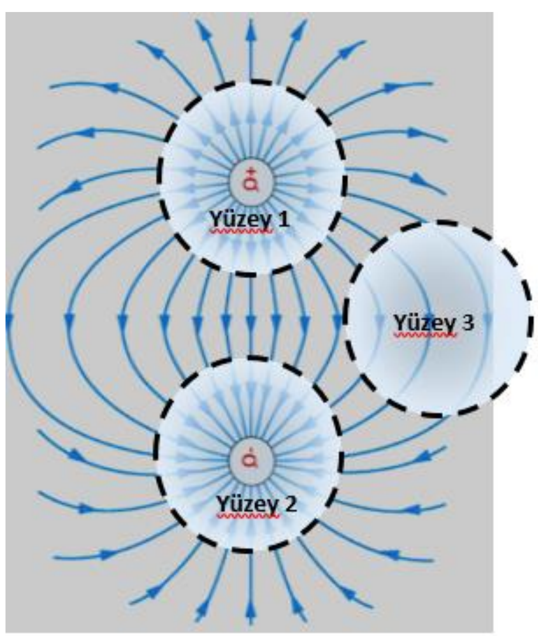
dir. q Gauss yüzeyinde bulunan net yük miktarıdır. Bu ifade elektriksel alan için Gauss yasasının uygulanışını gösterir ve bir q noktasını çevreleyen bir yüzeyden geçen elektrik akısının Gauss yüzeyinde bulunan q net yük miktarının bir ölçüsü olduğunu söyler. Eğer yük hacim yoğunluğu ρ olan bir V hacmine dağılmış ise o zaman yük,

$$q = \oint \rho\, dV$$

olmak üzere,

$$\Phi_\mathrm{E} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\oint \rho\, dV.$$

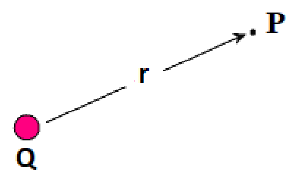
$\vec{E}$, pozitif bir yük kaynağını çevreler ise, elektrik akısı yüzeyden dışarıya doğrudur. Eğer nokta yük negatif ise elektrik alan Gauss yüzeyinden içeriye doğrudur.



Şekil 3.3 Gauss Yüzeyi

6. Hafta: Elektriksel Potansiyel

Elektriksel potansiyelin tartışılması önemlidir, çünkü elektriksel potansiyel, elektrik alanı ve elektriksel potansiyel enerji ile ilgili önemli bir kavramdır. Belirli bir durumdaki yükün nasıl hareket edeceği hakkında bilgi verir ve herhangi bir yükün potansiyel enerji değerini tahmin etmemizi sağlar. Q büyüklüğündeki bir nokta yükünden dolayı elektrik potansiyel:



$$V(r) = k\frac{Q}{r}$$

Şekil 3.4 Bir Nokta Yükün Potansiyeli

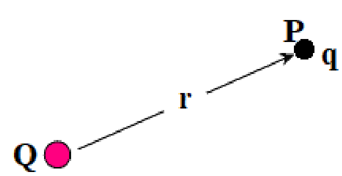
şeklinde verilir ve burada V, herhangi bir P noktasındaki Q yükünün elektriksel potansiyelidir. Elektrik potansiyel değeri, Q yükünün işaretine bağlı olarak pozitif veya negatif olacaktır. Q yükü pozitif ise V potansiyeli de pozitif, Q yükü negatifse V potansiyeli de negatif olacaktır. Potansiyel bir skaler niceliktir, vektör değildir. Yani bu eksi işareti ile ilişkili hiçbir yön yoktur. Eksi işareti size yükün hakkında bilgi verir.

Elektriksel potansiyelin boyut analizini yapalım:

$$V(r) = k\frac{Q}{r} = \frac{N\,m^2}{C^2}\,\frac{C}{m} = \frac{Nm}{C} = \frac{J}{C} = V(volt).$$

$$Volt = \frac{Joule}{Coulomb}$$

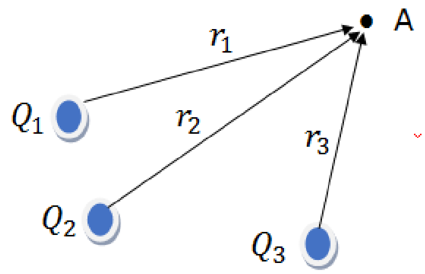
Elektriksel potansiyel ile elektriksel potansiyel enerji kavramlarını birbirine karıştırmayalım. Bu ikisi iki farklı kavramlardır. Eğer q yükü r kadar mesafedeki bir P noktasına yerleştirilirse Q yükünün alanında q nokta yükünün potansiyel enerjisi elde edilir.



$$potansiyel\ enerji = U = \frac{k\,Qq}{r} = Vq$$

Birden Fazla Yük Durumunda Potansiyel

Birden fazla yükün varlığı durumunda, elektriksel potansiyel V herbir yükten kaynaklanan potansiyellerin cebirsel toplamına eşittir.



$$V_A = k\frac{Q_1}{r_1} + k\frac{Q_2}{r_2} + k\frac{Q_3}{r_3}$$

Şekil 3.5 Birden Fazla Nokta Yükün Potansiyeli

- Aynı şekilde nokta yüklerin sayısına göre genelleştirilebilir.

$$V_A = k\frac{Q_1}{r_1} + k\frac{Q_2}{r_2} + k\frac{Q_3}{r_3} + \cdots + k\frac{Q_i}{r_i}$$

$$V = \sum \frac{kQ_i}{r_i}$$

- Sürekli yük dağılımı durumunda elektriksel potansiyel ise,

$$V = k\int \frac{Q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{Q_i}{r_i}$$

şeklinde genelleştirilebilir.

Elektriksel Potansiyel Fark Nedir?

A ve B noktaları arasındaki potansiyel fark, elektriksel kuvvetler tarafından küçük bir yükün yüksek potansiyel noktasından düşük potansiyel noktasına hareket ettirilmesi durumunda birim pozitif yük başına yaptığı iştir. Bu tanımla birlikte, uzayda herhangi bir noktanın potansiyeli birim test yükünü sonsuzdan istenilen referans noktasına getirmek için yapılan iş olarak tanımlanır.

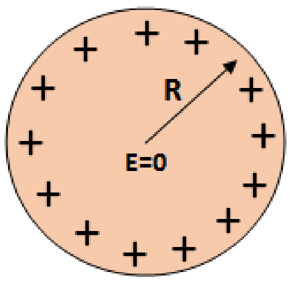
Bir q deneme yükünü, potansiyeli V_B olan bir noktadan V_A olan bir noktaya taşındığını düşünelim. Bu yüklü parçacığın potansiyelleri arasındaki fark;

$$Potansiyel\ Fark \rightarrow \Delta V = V_{BA} = V_B - V_A$$

şeklinde ifade edilir ve ifadeyi, B noktasının A noktasına göre potansiyeli olarak okuruz.

Yüklü iletken küre örneği;

Hatırlatma: Gauss Kanunu yardımıyla yüklü iletken bir kürenin elektrik alanı hesaplanmış ve yüklü iletken kürenin içindeki elektrik alanın sıfır olduğu bulunmuştu.



Kürenin içindeki elektrik alan $E = 0$

Kürenin hemen yüzeyindeki elektrik alan $E = k\frac{q}{R^2}$

Kürenin dışındaki elektrik alan $E = k\frac{q}{r^2}$

(Buradaki r kürenin yüzeyinden dışarısında seçilen Gauss yüzeyinin yarıçapı)

- Bir iletken dengede olduğunda, içindeki elektrik alanı sıfır olmakla sınırlıdır.
- İletken kürenin potansiyelini bulurken bir nokta yükün elektriksel potansiyelini düşünürüz.
- İletken bir kürenin içindeki elektrik alanı sıfırdır dolayısıyla potansiyel yüzeydeki değerinde ve sabit kalır.
- Bu durum dengedeki tüm iletkenler içinde geçerlidir.

Elektrik Alan ile Elektriksel Potansiyel Arasındaki İlişki

Elektriksel potansiyeldeki değişim veya voltaj elektrik alan değişim oranına eşittir.

$$\Delta V = V_{BA} = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Bu ilişkiyi, bir nokta elektrik alanı ile potansiyel için genelleyelim.

Bir Nokta Yükün Elektrik alanı; $E = k\frac{Q}{r^2}$ olduğunu biliyoruz. İfadeyi elektrik alan ile potansiyel arasındaki ilişkide yerine koyalım.

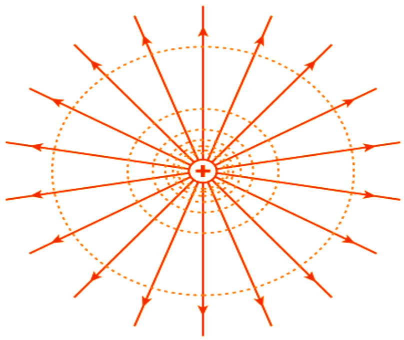
$$\Delta V = -\int_A^B k\frac{Q}{r^2}dr = kQ\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

integral sonsuzdan bir r noktasına alınırsa yani $r_1 = \infty$ ve $r_2 = r$, ve potansiyelin sonsuzda sıfır olduğu kullanılırsa, bir nokta yükün potansiyeli

$$V = k\frac{Q}{r}$$

olarak elde edilir.

Eş potansiyel Yüzeyler



Bir nokta yükün elektriksel potansiyeli,

$$V = k\frac{Q}{r}$$

olduğundan r yarıçapı potansiyeli belirler.

Şekil 3.6 Eş potansiyel Yüzey

Şekil 3.6, yük üzerine merkezlenmiş bir küre eş potansiyel yüzeydir. Eş potansiyeller kesikli çizgili dairelerdir. Oklu çizgiler ise elektrik alan çizgilerini gösterir. Kesikli çizgiler, voltajın eşit artışlarla ölçeklenmesini gösterir.

Eş potansiyel çizgilerinin özellikleri

- Elektrik alan çizgileri daima eş potansiyel bir yüzeye diktir.
- Eş potansiyel yüzeyler asla kesişmezler.
- Bir nokta yük için eş-potansiyel yüzeyler eş-merkezli küresel kabuklardır.
- Eş-potansiyel yüzeyde hareket eden bir test yükü elektrik alanda iş yapmış sayılmaz.
- Eş potansiyel yüzeylerin yönü yüksek potansiyelden düşük potansiyele doğrudur.
- Kuvvetli elektrik alanlarında eş potansiyel yüzeyler birbirine yakın, zayıf elektrik alanlarında ise eş potansiyel yüzeyler geniş aralıklarla yerleşmişlerdir.

Potansiyel Gradiyent
Elektrik Potansiyelinden Elektrik Alan Bulma:

A ve B noktaları arasındaki potansiyel farkının, bilinen bir elektrik alanda

$\Delta V = V_{BA} = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$ olduğunu biliyoruz. Eş potansiyel yüzey aralığı çok küçük ise bu potansiyel farkı dV ile gösterilir ve bu ifade de integral işlemine gerek kalmadan,

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

şeklinde gösterilir. Elektrik alan çizgilerinin eş potansiyel çizgilerine dik olduğu noktada elektrik alanı potansiyeldeki değişim cinsinden,

$$E = -\frac{dV}{dr}$$

olarak ifade edilir.

$d\vec{r}$ yerdeğiştirme vektörünü kartezyen koordinatlarda birim vektörler cinsinden açalım,

$$d\vec{r} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}$$

bu durumda potansiyel elde edilir:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz.$$

$V = V(x, y, z)$ üç boyutlu bir uzayda konumun fonksiyonu olduğundan, E elektrik alanı, V potansiyelin kısmi türevleri cinsinden elde edilebilir.

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

böylelikle,

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$$

$$= -\left[\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right] V = -\vec{\nabla} V$$

elektrik alanın kartezyen bileşenleri, potansiyel cinsinden ifadesi elde edilmiştir. Burada ∇ gradiyent operatörüdür.