DAĞILIŞLAR VE ÖRNEK SEÇİMİ

Bu kısımda ilk olarak nesnelerin kutulara (gözelere) dağılışı ve daha sonra nesnelerden seçim ele alınacaktır.

Nesnelerin veya kutuların özdeş olup olmamasına göre karşımıza değişik durumlar çıkmaktadır:

a) r tane farklı nesne, n tane farklı kutuya n^r farklı şekilde dağıtılabilir.

b) r tane özdeş nesne, n tane farklı kutuya,

$$s(n,r) = \binom{n-1+r}{r}$$

farklı şekilde dağıtılabilir.

c) $r \le n$ için r tane farklı nesne, n tane farklı kutuya her kutuda en çok bir nesne olacak şekilde $n(n-1)(n-2)...(n-(r-1))$ farklı biçimde dağıtılabilir.

d) $r \le n$ için r tane özdeş nesne, n tane farklı kutuya bir kutuda en çok bir nesne olacak şekilde $\binom{n}{r}$ farklı biçimde dağıtılabilir. ($r \le n$ için r özdeş nesnenin n farklı kutuya bir dağılışı, n tane kutudan r tanesinin bir seçimi olmak üzere, farklı dağılışların sayısı $\binom{n}{r}$ dır.)

e) $r \ge n$ durumunda r tane özdeş nesne n tane farklı kutuya boş kutu kalmayacak şekilde,

$$\binom{r-1}{n-1}$$

farklı biçimde dağıtılabilir. (Boş kutu kalmaması için r özdeş nesneden n tanesi her kutuda bir nesne olacak şekilde yerleştirilir (bir tek biçimde yapılabilir) ve bundan sonra geriye kalan $r-n$ özdeş nesne n kutuya dağıtılır. Buna göre sonuç sayısı,

$$s(n,r-n) = \binom{n-1+r-n}{r-n} = \binom{r-1}{r-n}$$

dır.

f) $1,2,...,n$ ile numaralanmış n tane nesne, $1,2,...,n$ ile numaralanmış n kutuya her kutuda bir nesne bulunacak şekilde $n!$ farklı biçimde dağıtılabilir. Belli bir dağılışta bir kutunun numarası ile bu kutuda bulunan nesnenin numarası aynı ise bir eşleşme vardır denir. Tüm kutular için eşleşme olacak şekilde bir tek dağılış vardır. Bir numaralı kutuda eşleşme olacak şekildeki dağılışların sayısı (*n*-1)! dır. Bir numaralı kutuda eşleşme olan dağılışların bazıları için diğer kutularda da eşleşme olabileceğine dikkat edin. Belli iki kutuda, örneğin 1 ve 3 numaralı kutularda eşleşme olacak şekildeki dağılışların sayısı (*n*-2)! dır.

g) $(r_1 + r_2 + \ldots + r_n = r, 0 \le r_i \le n, i = 1,2,\ldots,n)$ olmak üzere *r* farklı nesne, 1. kutuda r_1 , 2. kutuda r_2 , ... , *n*. kutuda r_n nesne olacak şekilde *n* farklı kutuya,

$$\binom{r}{r_1}\binom{r-r_1}{r_2}\ldots\binom{r-(r_1+r_2+\ldots+r_{n-1})}{r_n} = \frac{r!}{r_1!r_2!\ldots r_n!}$$

biçimde dağıtılabilir.

Şimdi nesnelerden seçim veya başka bir ifade ile örnekleme konusuna kısaca değinelim.

A) n farklı nesneden iadeli olarak (çekileni yerine atarak) birer birer k nesne çekilmesi (çekiliş yapılması) ve çekiliş sırasına bakılarak sonuçların değerlendirilmesi durumunda karşımıza n nesnenin k-lı tekrarlı permütasyonları çıkmaktadır Bunların sayısı n^k dır.

B) n farklı nesneden iadeli olarak birer birer k nesne çekilmesi ve çekiliş sırasına bakılmaksızın sonuçların değerlendirilmesi durumunda sonuçları birbirinden ayırt eden özellik her bir nesnenin kaç kez çekilmiş olmasıdır. $i = 1,2,\ldots,n$ için x_i ‘ler her bir nesnenin kaç kez çekildiğini göstermek üzere sonuç sayısı,

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

denkleminin negatif olmayan tamsayılar kümesindeki çözüm sayısı kadardır. Buna göre farklı sonuçların sayısı,

$$s(n,k) = \binom{n-1+k}{k}$$

dır. Bu durumda sonuçlar aynı zamanda n farklı nesnenin k-lı tekrarlı kombinasyonları olarak da isimlendirilmektedir.

C) n farklı nesneden iadesiz olarak birer birer k nesne $(k \le n)$ çekilmesi ve çekiliş sırasına göre sonuçların değerlendirilmesi durumunda karşımıza n farklı nesnenin k-lı permütasyonları çıkmaktadır. Bunların sayısı,

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))$$

dır.

D) n farklı nesneden iadesiz olarak birer birer k nesne $(k \leq n)$ çekilmesi ve çekiliş sırasına bakılmaksızın sonuçların değerlendirilmesi durumunda farklı sonuçların sayısı,

$$\binom{n}{k}$$

dır. Her bir sonuca, n farklı nesnenin k-lı bir kombinasyonu denir.

n farklı nesneden iadesiz olarak birer birer k nesne $(k \leq n)$ çekilmesi ve çekiliş sırasına bakılmaksızın sonuçların değerlendirilmesi deneyi ile bu n nesneden aynı anda k nesne alınması deneyi sonuçlar bakımından birbirinin aynısıdır.

Problem $1, 2, \ldots, n$ sayıları ile numaralanmış n tane kutu ve özdeş k tane top göz önüne alalım. k tane özdeş top n farklı kutuya kaç yolda dağıtılabilir? (Boş kutu kalabileceği gibi topların tümü bir tek kutuda da olabilir.)

Kutular numara sırasına göre yan yana dizildikten sonra aralarına birer ayıraç (levha) konsun ve sadece k tane top ile n - 1 tane ayıraç göz önüne alınsın. Aşağıdaki gibi bir durum,

$$000|\;|00|0|\;|\ldots|0|$$

1 numaralı kutuda 3, 2 numaralı kutuda 0, 3 numaralı kutuda 2, dört numaralı kutuda 1, 5 numaralı kutuda 0, ..., n-1 numaralı kutuda 1 ve n numaralı kutuda 0 tane top olan dağılışı anlatmaktadır. Buna göre farklı dağılışların sayısı, k tanesi özdeş (top) ve n-1 tanesi özdeş (levha) olan $n-1+k$ tane nesnenin farklı sıralanışlarının sayısı kadar olacaktır. Buna göre, k özdeş topun n farklı kutuya dağılışlarının sayısını $s(n,k)$ ile gösterilirse,

$$s(n,k) = \frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!} = \binom{\text{n - 1+ k}}{\text{k}}$$

dır.

Örneğin n=3, k=2 için dağılışlar;

00				00				00
1.	2.	3.	1.	2.	3.	1.	2.	3.

0	0		0		0		0	0
1.	2.	3.	1.	2.	3.	1.	2.	3.

olmak üzere, dağılış sayısı $s(3,2) = \binom{3\text{-}1\text{+}2}{2} = 6$ dır.

$n = 3,\ k = 3$ için dağılışlar

000				000				000
1.	2.	3.	1.	2.	3.	1.	2.	3.

$$\underset{1.}{\underline{\;00\;}}\quad \underset{2.}{\underline{\;0\;}}\quad \underset{3.}{\underline{\quad\;}}\qquad\qquad \underset{1.}{\underline{\;00\;}}\quad \underset{2.}{\underline{\quad\;}}\quad \underset{3.}{\underline{\;0\;}}\qquad\qquad \underset{1.}{\underline{\quad\;}}\quad \underset{2.}{\underline{\;00\;}}\quad \underset{3.}{\underline{\;0\;}}$$

$$\underset{1.}{\underline{\;0\;}}\quad \underset{2.}{\underline{\;00\;}}\quad \underset{3.}{\underline{\quad\;}}\qquad\qquad \underset{1.}{\underline{\;0\;}}\quad \underset{2.}{\underline{\quad\;}}\quad \underset{3.}{\underline{\;00\;}}\qquad\qquad \underset{1.}{\underline{\quad\;}}\quad \underset{2.}{\underline{\;0\;}}\quad \underset{3.}{\underline{\;00\;}}$$

$$\underset{1.}{\underline{\;0\;}}\quad \underset{2.}{\underline{\;0\;}}\quad \underset{3.}{\underline{\quad\;}}$$

olmak üzere, $s(3,3)=\binom{3\text{-}1+3}{3}=10$ dır.