# Örnek Uzay, Olaylar ve $\sigma$-Cebir

Aklımız ile gerçek dünyadaki olguları anlamak-anlatmak (modellemek) isteriz. Anlama-anlatma sürecinde ilk önce yapılması gereken, olgudaki kavramlar ile anlatımda kullanılan dilin (örneğin matematik) kavramları arasındaki bağı kurmaktır. Fizik derslerinde gördüğümüz gibi, gerçek dünyadaki hareket olgusundaki hız kavramı anlatımda türev, kuvvet kavramı anlatımda bir vektör olmaktadır.

Bu derste, ilk önce gerçek dünyadaki Rasgelelik ile ilgili kavramları verip bunların Olasılık ve İstatistik Teorisindeki karşılıklarını oluşturmaya başlayacağız.

**Rasgele Sonuçlu Deney:** Sonuçlarının kümesi belli olan, ancak hangi sonucun ortaya çıkacağı önceden söylenemeyen bir işleme Rasgele Sonuçlu Deney veya kısaca Deney denir.

**Örnek Uzay:** Bir deneyin tüm olabilir sonuçlarının kümesine Örnek Uzay denir.

**Olay:** Örnek uzayın bir altkümesine Olay denir.

<u>Örnek1:</u> Bir tavla zarının atılması ve üste gelen yüzeyin gözlenmesi bir Rasgele Sonuçlu Deney'dir. Olabilir sonuçların kümesi, yani Örnek Uzay,

S = { ⚀ , ⚁ , ⚂ , ⚃ , ⚄ , ⚅ }

olarak ifade edilebilir (saymayı bilmeyen iki yaşında bir çocuk üst yüzeyde bunları gözleyecektir). Örnek uzayı genellikle *S* harfi veya $\Omega$ harfi ile göstereceğiz. Bu deneyde,

$A=$ ⚀

$B=$ ⚀,⚂

birer olaydır. *S* nin kendisi de bir olaydır. Boş kümeyi de bir olay kabul edelim. Buna göre zar atışında $2^6=64$ tane olay söz konusudur.

Bir $A(A\subset S)$ olayının gerçekleşmesi demek deney sonucunun $A$ kümesinin elemanı olması demektir. Örneğin zar atıldığında ⚀ sonucu gelmişse, yukarıdaki $A=$ ⚀ ile $B=$ ⚀,⚂ olayları gerçekleşmiş demektir. Sonuç ⚀ olmuşsa, tek sayı noktalı yüzey gelmesi olayı da gerçekleşmiştir. *S* nin altkümelerinden ⚀ elemanını içeren altkümelere karşılık gelen tüm olaylar gerçekleşmiştir. Bunların sayısı 32 dir. ⚀ elemanını içermeyen altkümelerin sayısı da $2^5=32$ dir. Zar atışı sonucunda ⚀ geldiğinde 32 tane olay gerçekleşmekte ve 32 tane olay da gerçekleşmemektedir. Diğer sonuçlar için de aynı şey söz konusudur. Zar atıldığında, hangi sonuç gelirse gelsin zar atışı deneyi ile ilgili 64 tane olaydan yarısı gerçekleşmektedir.

Her ne kadar, tavla zarlarının yüzeylerinde yazılı sayılar bulunmasa da, ki bunlar noktalar sayma (ölçme) işleminden sonra ortaya çıkıyor olsa da, şimdilik zar yüzeylerinde nokta yerine sayıların yazılı olduğunu düşünelim (ileride bunu düzeltiriz, noktalı zarlara döneriz). Buna göre Örnek Uzay,

*S* = {①,②,③,④,⑤,⑥} , *n*(*S*)=6

olarak ifade edilebilir. Bu deney ile ilgili olaylardan bazıları,

*A* = {①} : bir gelmesi olayı
*C* = {①,③,⑤} : tek sayı gelmesi olayı
*D*= {①,②,③} : dörtten küçük bir sayı gelmesi olayı
*E* = {⑤,⑥} : dörtten büyük bir sayı gelmesi olayı
*F* = {⑥} : altı gelmesi olayı

$G$ = {①,②,③,④,⑤}: altı gelmemesi olayı
$H = A \bigcup F$={①,⑥} : bir veya altı gelmesi olayı
$I = C \cap D$= {①,③} : tek ve dörtten küçük bir sayı gelmesi olayı

dır. Tüm olayların kümesi $S$ nin kuvvet kümesidir.

$$\mathscr{P}(S) = \{A : A \in S\} \quad , \quad n(\mathscr{P}(S)) = 2^6$$

kuvvet kümesinde 64 tane küme (olay) vardır. Bunlar arasındaki $\varnothing$ boş kümeye imkânsız olay, $S$ nin kendisine de kesin olay denir. Bazı durumlarda, olayların sadece bir kısmı ile ilgileniriz. Örneğin zar atışında sadece gelen nokta sayısının tek veya çift olması ile ilgileniyor olabiliriz. Bu durumda ilgilendiğimiz olayların kümesi, $\varnothing$ ve $S$ ile birlikte,

{$\varnothing$, $S$ , {①,③,⑤}{②,④,⑥}}

dır.

<u>Örnek2:</u> Bir madeni paranın tura gelinceye kadar atılması deneyinde Örnek Uzay,

$S$ = {T , YT , YYT , YYYT, YYYYT , ...}

biçiminde gösterilsin. Bu deney ile ilgili olaylardan bazıları,

$A$ = {T} : ilk atışta tura gelmesi olayı
$B$ = {T, YT, YYT} : dördüncü atıştan önce tura gelmesi olayı
$C$ = {YT, YYYYYYT} : ikinci veya yedinci atışta tura gelmesi olayı
$D$ = {T, YYT, YYYYT, YYYYYYT, ...} : turanın tek sayılı atış sonucu gelmesi olayı

olmak üzere bu deney ile ilgili sonsuz tane olay tanımlanabilir. Tüm olayların kümesi olan kuvvet kümesi oldukça karmaşıktır.

<u>Örnek3:</u> Yarın saat 12 de Fen Fakültesinde, havuzların yanında hava sıcaklığının (derece santigrat olarak) gözlenmesi deneyi ile ilgili Örnek Uzay,

$S = \{t : -50<t<50\}$

biçiminde yazılabilir. Bu deney ile ilgili olaylardan bazıları,

$A = \{t : 15<t<35\}$ : sıcaklığın 15 ile 25 derece arasında olması olayı
$B = \{t : 0 \leq t \leq 50\}$ : sıcaklığın sıfırın üzerinde olması olayı
$C = \{t : t=10\}$ : sıcaklığın 10 derece olması olayı

olmak üzere bu deney ile ilgili sonsuz tane olay tanımlanabilir. Tüm olayların kümesi olan kuvvet kümesi Örnek 2' dekine göre daha karmaşıktır.

<u>Örnek4:</u> Bu gece saat 0 'dan yarın akşam saat 24 'e kadar aynı yerde hava sıcaklığı sürekli gözlense, deney sonucu

$$\begin{aligned} f : [0,24] &\to (-50,50) \\ t &\to f(t) \end{aligned}$$

gibi bir fonksiyon, hattâ sürekli bir fonksiyon olur diyebiliriz. Buna göre Örnek Uzay,

$S = \{f : \ f : [0,24] \to (-50,50)$ ve $f$ fonksiyonu sürekli$\}$

biçiminde yazılabilir. Örneğin,

$A = \{f : \ f : [0,24] \to (-50,50)$, $f$ fonksiyonu sürekli ve $f(t)>0$ , $t \in [0,24]\} \subset S$

olayı, 24 saat boyunca hava sıcaklığının sıfırın üstünde olması olayıdır.

Bir $S$ Örnek Uzayında $A$ ile $B$ iki olay ($A,B \subset$ S) olmak üzere:

$A \cup B$ olayına “$A$ veya $B$ olayı”

$A \cap B$ olayına “$A$ ve $B$ olayı”

$\bar{A} =$ S\A olayına “A değil olayı”

denir.

$A$ veya $B$ olayının gerçekleşmesi demek en az birinin gerçekleşmesi demektir.

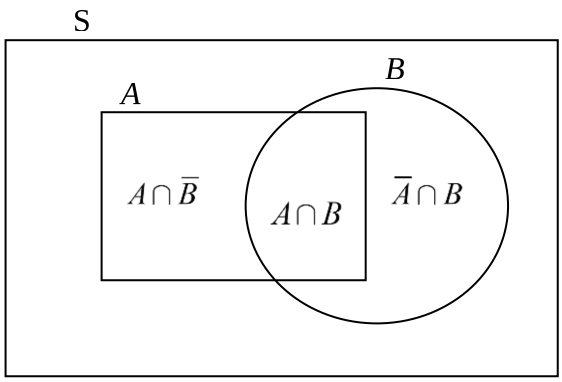
$A$ ve $B$ olayının gerçekleşmesi demek her ikisinin de gerçekleşmesi demektir.

$\bar{A}$ olayının gerçekleşmesi demek $A$ nın gerçekleşmemesi demektir.

Dikkat edilirse, olgular dünyasında olaylardan, matematik karşılıklarında ise kümelerden bahsetmekteyiz. Olayları “ve” , “veya” bağlaçları ile bağlayıp ya da değilleme yaparak yeni olaylardan bahsetmekteyiz. Bu olayların karşılıkları olan kümelere gelince, “birleşim”,”kesişim” işlemleri yaparak ve tümleyen alarak yeni kümeler elde etmekteyiz.

Bir deney ile ilgili iki olaydan ikisi de deney sonucunda aynı anda gerçekleşemiyorsa, yani Örnek Uzayda bu iki deneye karşılık gelen kümelerin arakesiti boş küme ise bu olaylara ayrık olaylar denir. Bir zar atışında, çift sayı gelmesi olayı ile tek sayı gelmesi olayı ayrık olaylardır.

Deneyin kendisini göz ardı edip sadece Örnek Uzayı ve olayları göz önünde tutarsak, Örnek Uzay matematikteki Evrensel Küme, olaylar da altkümeler olacaktır. Örnek Uzay’ın boş küme olmadığını varsayacağız.



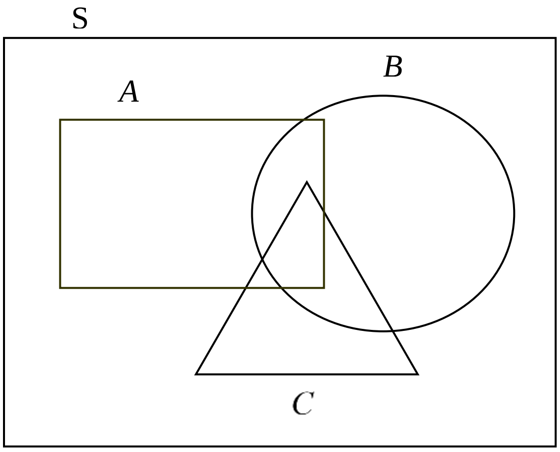

$S = A \cup \bar{A}$

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \qquad A \cap B = A \setminus (A \cap \bar{B})$

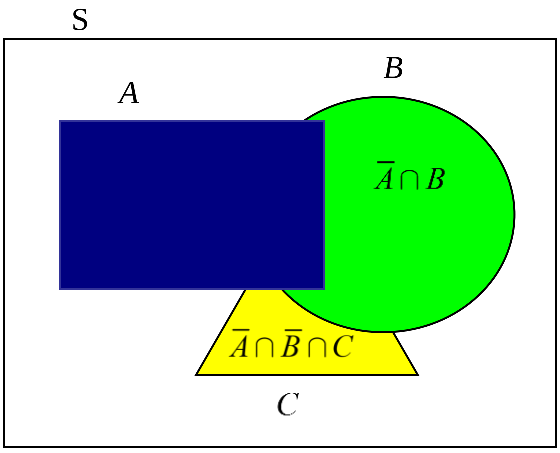
$B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$

$A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B) = B \cup (\bar{B} \cap A) = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$

olmak üzere, son eşitlikte iki kümenin birleşimi üç farklı şekilde ayrık kümelerin birleşimi olarak yazılmıştır. Üç küme için,




$$A \cup B \cup C = A \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$$




dört küme için,

$$A \cup B \cup C \cup D = A \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup ((\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap D)$$

ve sayılabilir sonsuz tane kümenin birleşimi ayrık kümeler cinsinden

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup (\bar{A}_1 \cap A_2) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup \ldots$$

olarak yazılabilir (Ödev olarak ispatlayınız). Sezgisel olarak, $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ kümelerinin birleşimindeki elemanlar; $A_1$ dekiler, $A_1$ de olmayıp da $A_2$ dekiler, $A_1$ de olmayıp ve $A_2$ olmayıp $A_3$ dekiler, ... ‘den oluşmaktadır diyebiliriz.

**Sınıf:** Kümelerden oluşan kümelere sınıf (kümeler sınıfı) veya aile (kümeler ailesi) diyelim. Sınıflar alışılagelmiş olarak el yazısı büyük harflerle gösterilir. Biz sınıfları genellikle *U harfi ile göstereceğiz.*

Örnek4: Zar atışı deneyinde Örnek uzay,

$S$ = {①,②,③,④,⑤,⑥} , $n(S)$=6

ve tüm olayların kümesi,

$\mathscr{P}(S) = \{A : A \in S\}$ , $n(\mathscr{P}(S)) = 2^6$

olmak üzere, $\mathscr{P}(S)$ kuvvet kümesi *S* deki altkümelerin sınıfıdır. Başka bir sınıf,

$U = \{\varnothing, S, \{①,③,⑤\}\{②,④,⑥\}\}$

dır. *S* nin altkümeleri ile çok sayıda sınıf oluşturulabilir. Bazıları,

$U_1 = \{\{①,③,⑤\}\{②,④,⑥\}\}$

$U_2 = \{\{①\},\{②\},\{③\},\{④\},\{⑤\},\{⑥\}\}$

$U_3 = \{\{①\},\{⑤\},\{⑥\},\{②,④,⑥\},S\}$

$U_4 = \{\{①\},\{②\},\{③\},\{④\},\{⑤\},\{⑥\},\{②,④,⑥\}\}$

$U_5 = \{\varnothing, S\}$

$U_6 = \{\varnothing\}$

olmak üzere, *S* nin altkümeleri ile oluşturulan sınıflar $\mathscr{P}(S)$ kuvvet kümesinin bir altkümesidir. Kaç tane sınıf oluşturulabilir?

Yukarıdaki, $\mathscr{P}(S)$, $\mathcal{U}$ , $U_5$ sınıfları birleşim, kesişim ve tümlemeye göre kapalıdır, yani bu işlemler sonucu elde edilen kümeler yine sınıfın elemanıdır. Böyle sınıflardaki olaylar (*S* nin alkümeleri) ile "ve", "veya" bağlaçlarını kullanarak ve "değilleme" yaparak oluşturulan olaylar yine ailenin içinde kalmaktadır.

Üzerinde çalışacağımız kümeyi genellikle $\Omega$ veya S ile göstereceğiz ve boş olmadığını varsayacağız demiştik. Bundan böyle daha çok $\Omega$ harfini kullanacağız. Kuvvet kümesi için kullandığımız $\mathscr{P}(\Omega)$ gösterimi ile birlikte $2^\Omega$ gösterimini de kullanacağız.