Tanım: $\Omega \neq \emptyset$ ve U **,** Ω 'da bir sınıf olmak üzere
i) $\Omega \in U$
ii) A$\in U \quad \Rightarrow \ \overline{A} \in U$
iii) (A_n), U ‘daki kümelerin bir dizisi $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$
özellikleri sağlandığında U 'ya Ω 'da σ-cebir denir.

Örnek: Ω ={a,b,c,d} olsun
U_1 ={ $\emptyset$,{a},{b,c,d}, Ω }
U_2 ={{a},{b},{c},{d}}
U_3 ={ $\emptyset$, Ω }
olmak üzere, bu sınıflardan hangisi σ-cebirdir?
U_1 sınıfı σ-cebirdir
U_2 sınıfı σ-cebir değildir
U_3 sınıfı σ-cebirdir.

Örnek: Ω boş olmayan bir küme olmak üzere 2^{Ω} kuvvet kümesi bir σ-cebirdir. Yukarıdaki üç özelliğin sağlandığı kolayca görülebilir.
i) $\Omega \subset \Omega \Rightarrow \Omega \in 2^{\Omega}$
ii) A$\subset \Omega \Rightarrow \overline{A} = \Omega \backslash A \subset \Omega \Rightarrow \overline{A} \in 2^{\Omega}$
iii) (A_n), 2^{Ω} da dizi, yani $A_n \subset \Omega$, n=1,2,3,… olsun.
$A_n \subset \Omega$, n=1,2,3,… $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \Omega \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset 2^{\Omega}$

Teorem: U , Ω 'da bir σ-cebir ise
a) $\emptyset \in U$
b) $A_1, A_2 \in U \ \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in U$
c) $A_1, A_2 \in U \ \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in U$
$A_1, A_2, ..., A_n \in U \ \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in U$
$A_1, A_2, ..., A_n, ... \in U \ \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in U$
d) $A_1, A_2 \in U \Rightarrow A_1 \backslash A_2 \in U$
dır.

İspat: U , Ω 'da bir σ-cebir olsun.
a) $\Omega \in U$ (tanımdaki (i) şıkkından)
$\overline{\Omega} \in U$ (tanımdaki (ii) şıkkından)
$\overline{\Omega} = \emptyset \in U$
dır. Boş küme σ-cebirin elemanıdır.
b) $A_1, A_2 \in U$ olsun. Yukarıdaki (**a)** ve (iii) şıklarından,

$$A_1, A_2, \varnothing, \ldots, \varnothing, \ldots \in U \;\; \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \in U$$

dır. Kolayca,

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in U \;\; \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$$

olduğu görülmektedir. σ-cebir sonlu birleşime göre kapalıdır.

c) $A_1, A_2 \in U$ olsun. Yukarıdaki **(ii)** şıkkından,

$$\overline{A_1}, \overline{A_2} \in U \;\; \Rightarrow \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \in U \;\; \Rightarrow \overline{\overline{A_1} \cup \overline{A_2}} \in U \;\; \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in U$$

dır. Benzer şekilde,

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in U \;\; \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in U$$

ve

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in U \;\; \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in U$$

olduğu gösterilebilir. σ-cebir olan sınıflar sonlu kesişime göre ve sayılabilir sonsuz kesişime göre kapalıdır.

d) $A_1, A_2 \in U \Rightarrow A_1, \overline{A_2} \in U \Rightarrow A_1 \cap \overline{A_2} \in U \;\; \Rightarrow A_1 \setminus A_2 \in U$

dır.

Not: σ-cebirler $\cup, \cap, \setminus$ işlemlerinin sonlu veya sayılabilir sonsuz kez uygulanmasına göre kapalı sınıflardır.

Gerçek dünyadaki rasgele sonuçlu bir deneyle ilgili olabilecek sonuçların kümesi Örnek Uzay, olaylar Örnek uzayın altkümeleri ve ilgilendiğimiz olayların kümesi ise bir σ-cebir oluşturmaktadır. Örneğin, 4 farklı renkten toplar bulunduran bir torbadan rasgele bir top çekilmesi ve renginin gözlenmesi deneyindeki Örnek Uzay 4 elemanlı bir kümedir. Bu deneydeki tüm olaylar bizi ilgilendiriyor olsun. Tüm olayların sınıfı Örnek Uzayın kuvvet kümesidir ve bu bir σ-cebirdir. Deney ile ilgili söz konusu olabilecek olaylardan yarısı deney sonucunda gerçekleşmektedir. Bu "olayların olasılıkları" aynı mıdır? Örneğin, torbada 1 beyaz, 2 siyah, 3 sarı, 4 kırmızı top bulunsa, koyu renkli top çekilmesi olayının olasılığı ne olurdu? Beyaz top gelmesi olasılığı nedir? Kırmızı topun gelmemesi olasılığı nedir?
Yarıçapı 2 santimetre olan bir tavla pulu masadan yere düştüğünde 30x30 santimetrelik aralıksız döşenmiş kalebodur taşlarından sadece birinin <u>içinde</u> olması (diğerleri ile kesişmemesi) olasılığı nedir?
Olasılık kavramı bir sonraki derste...

Biraz geç kalınmış olsa da bazı hatırlatmalar:
Birleşim: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\}$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \;\; x : \text{en az bir } n \text{ için } x \in A_n \,, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Birleşiminin etkisiz elemanı $\varnothing$ olmak üzere, $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$ dır.

Kesişim: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x : x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge ... \wedge x \in A_n\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \cup ... = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \quad x : \text{her } n \text{ için } x \in A_n \text{ , } n = 1, 2, 3, ...$$

Kesişimin etkisiz elemanı Ω olmak üzere, $A \cap \Omega = \Omega \cap A = A$ dır

Birleşim ve Kesişimin Bazı Özellikleri:

$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (değişme özelliği)

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ (birleşme özelliği)

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ “ “

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ($\cap$ ’in $\cup$ üzerine dağılma özelliği)

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ($\cup$ ’in $\cap$ üzerine dağılma özelliği)

$$A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap B_i) \quad , \quad A \cup (\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A \cup B_i)$$

Tümleme: $A, B \subset \Omega$ olsun. $B \backslash A$, A’nın B’ye göre tümleyenini göstermek üzere,

$$B \backslash A = \{x : x \in B \text{ ve } x \notin A\}$$

dır. $\Omega \backslash A$ kümesi A nın Ω ya göre tümleyeni olmak üzere bu kümeyi $\overline{A}$ şeklinde göstereceğiz ve kısaca A nın tümleyeni diyeceğiz.

De’Morgan Kuralları:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad , \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n \quad , \quad \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$$

PROBLEMLER

1. $\Omega = \{a, b, c, d\}$ olsun. 2^{Ω} kuvvet kümesinin elemanlarını yazınız. 2^{Ω} bir σ-cebir midir? $\{\{a\}\}$ sınıfını kapsayan iki tane σ-cebir bulunuz.

2. $\mathbb{R}$, reel sayıların kümesi ve

$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}: a<x<b\}$ olmak uzere $U_1=\{(a,b): a<b, a,b\in R\}$

$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a\le x\le b\}$ olmak uzere $U_2=\{[a,b]: a\le b, a,b\in R\}$

$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a<x\le b\}$ olmak uzere $U_3=\{(a,b]: a<b, a,b\in R\}$

$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}: a\le x<b\}$ olmak uzere $U_4=\{[a,b): a<b, a,b\in \mathbb{R}\}$

$(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}: x<a\}$ olmak uzere $U_5=\{(-\infty,a): a\in\mathbb{R}\}$

$(-\infty,a]=[x\in\mathbb{R}: x\le a\}$ olmak uzere $U_6=\{(-\infty,a]: a\in\mathbb{R}\}$

$(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}: x>a\}$ olmak uzere $U_7=\{(a,\infty): a\in\mathbb{R}\}$

$[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}: x\ge a\}$ olmak uzere $U_8=\{[a,\infty): a\in\mathbb{R}\}$

olsun. U_1 sınıfı $\mathbb{R}$ deki açık aralıkların sınıfı, U_2 sınıfı $\mathbb{R}$ deki kapalı aralıkların sınıfı olmak üzere, $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_8$ sınıfları birer σ-cebir değildir. Gösteriniz.

3. Ω sonsuz elemanlı bir küme ve

$$U=\{A\subset\Omega : A \text{ veya } \overline{A} \text{ sayılabilir.}\}$$

olmak üzere, U sınıfının Ω da bir σ-cebir olduğunu gösteriniz.

4. U, Ω da σ-cebir ve $B\neq\emptyset$, $B\subset\Omega$ olsun.

$$U_B=\{A: A=B\cap C, C\in U\}$$

olmak üzere U_B nin B de bir σ-cebir olduğunu gösteriniz. $B\subset\Omega$ ve $B\in U$ ise $U_B\subset U$ olduğunu ispatlayınız.

5. Aşağıdaki durumlar için $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ yi bulunuz.

a) $A_n=(\frac{-1}{n},\frac{1}{n})$

b) $A_n=(\frac{-1}{n},3]$

c) $A_n=(a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n})$, $a<b$

d) $A_n=\{(x,y): 0\le x^2+y^2\le\frac{1}{n},\ (x,y)\in R\times R\}$

e) $A_n=\{(x,y): 4-\frac{1}{n}\le x^2+y^2<9+\frac{1}{n},\ (x,y)\in R\times R\}$

6. Aşağıdaki durumlar için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ yi bulunuz.

a) $A_n = [\frac{1}{n}, 2]$

b) $A_n = (-n, 2]$

c) $A_n = (\frac{1}{n}, 4 - \frac{1}{n}]$

d) $A_n = \{(x, y) : \frac{1}{n} \le x^2 + y^2 \le 4 - \frac{1}{n} \ , \ (x, y) \in R \times R\}$

e) $A_n = \{(x, y) : 2 + \frac{1}{n} < x^2 + y^2 < 4 - \frac{1}{n}, (x, y) \in R \times R\}$

7. $A \cap B \neq \emptyset$ olsun. $A \cup B$ kümesini ayrık iki kümenin birleşimi olarak yazınız.

$$A \cup B \cup C = A \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$$

olduğunu gösteriniz.

8. $A_i \subset \Omega, \ i = 1, 2, \ldots$ olmak üzere,

$$B_1 = A_1 \ , \ B_n = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_{n-1} \cap A_n \ , \ n = 2, 3, \ldots$$

olsun.

a) $B_i \cap B_j = \emptyset \ , \ i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, \ldots$

b) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$

c) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$

olduğunu gösteriniz.