Olasılık Ölçüsü. Olasılık Uzayı

Önceki derste, gerçek dünya ile ilgili,

Rasgele Sonuçlu Deney: Sonuçlarının kümesi belli olan, ancak hangi sonucun ortaya çıkacağı önceden söylenemeyen bir işleme Rasgele Sonuçlu Deney veya kısaca Deney denir,
Örnek Uzay: Bir deneyin tüm olabilir sonuçlarının kümesine Örnek Uzay denir,
Olay: Örnek uzayın bir altkümesine Olay denir,

kavramlarını ve aklımızın dünyasında,

σ-cebir: $\Omega \neq \emptyset$ ve U, Ω'da bir sınıf olmak üzere

i) $\Omega \in U$

ii) $A \in U \Rightarrow \overline{A} \in U$

iii) (A_n), U 'daki kümelerin bir dizisi $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$

özellikleri sağlandığında U'ya Ω'da σ-cebir denir,

kavramını tanımladık.

Deney-Örnek Uzay	Ω
olay	$A \subset \Omega$
ve	$\cap$
veya	$\cup$
değil	tümleme
ilgilendiğimiz olaylar	σ-cebir
bir olayın olasılığı	?

Şimdi Olasılık Ölçüsü tanımını verelim.

Tanım: U, Ω'da bir σ-cebir olsun. Bir

$$P: U \to \mathbb{R}$$
$$A \to P(A)$$

fonksiyonu,

i) $\forall A \in U$ için $P(A) \geq 0$

ii) $P(\Omega) = 1$

iii) $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ler U'da ayrık olaylar $\Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

özelliklerine sahip olduğunda, P fonksiyonuna olasılık ölçüsü denir. $P(A)$ değerine A olayının olasılık ölçüsü ya da kısaca A'nın olasılığı denir.

Tanım: U, Ω'da bir σ-cebir ve P, U'da bir olasılık ölçüsü olmak üzere (Ω, U, P) üçlüsüne olasılık uzayı denir.

Teorem: (Ω, U, P) bir olasılık uzayı olsun:

a) $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$

b) $A_1, A_2, \dots, A_n$, U da ayrık kümeler $\Rightarrow \mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \mathrm{P}(A_1) + \dots + \mathrm{P}(A_n)$

c) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

d) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

e) $0 \leq P(A) \leq 1$

f) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

g) $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \dots + \mathrm{P}(A_n)$ $\qquad \left(P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \right)$

$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) \leq \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \dots + \mathrm{P}(A_n) + \dots$ $\qquad \left(P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \right)$

h) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots \quad \Rightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} P(A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$

$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots \quad \Rightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$

dır.

İspat:

a) $A_n = \varnothing$, $n = 1, 2, \dots$ olsun. Bu durumda, A_n ‘ler ayrık ve

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$$

dır. Ölasılık ölçüsü tanımındaki (iii) şıkkından,

$$\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n)$$

$$\mathrm{P}(\varnothing) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(\varnothing) \Rightarrow \mathrm{P}(\varnothing) = 0$$

dır.

b) $A_1, A_2, \dots, A_n \in U$ kümeleri ayrık olsun. $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$ olmak üzere (A_n) dizisindeki kümeler ayrıktır.

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \dots \cup \varnothing \cup \dots)$$

(iii) $\qquad = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \dots + \mathrm{P}(A_n) + \mathrm{P}(\varnothing) + \mathrm{P}(\varnothing) + \dots$

(a) $\qquad = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \dots + \mathrm{P}(A_n)$

dir.

c) $A \cup \overline{A} = \Omega$ ve $P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(A \cup \overline{A}) = 1 \Rightarrow P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

d)

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad B = A \cup (\overline{A} \cap B)$$

$$\Rightarrow \quad P(B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$$

$$\Rightarrow \quad P(A) \le P(B) \;, (P(\overline{A} \cap B) \ge 0)$$

e) $\forall \; A \in U$ için $\varnothing \subset A \subset \Omega \Rightarrow 0 \le P(A) \le 1$ dır.

f) $$A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$$

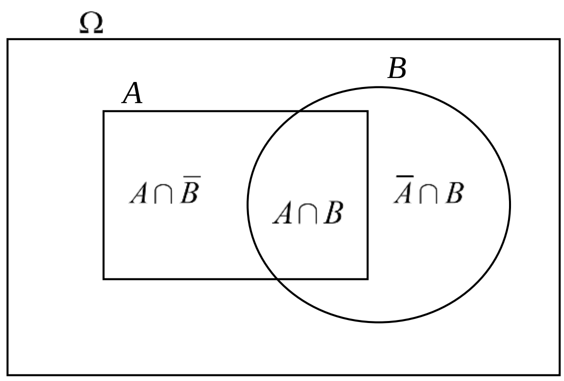
ve

$$B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \Rightarrow P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

olmak üzere,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

elde edilir.



$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

eşitliğini ödev olarak ispatlayınız.

g)

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \le \mathrm{P}\left(A_1 \cup (\overline{A}_1 \cap A_2) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup \ldots \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_{n-1} \cap A_n) \right)$$

$$= \mathrm{P}(A_1) + P(\overline{A}_1 \cap A_2) + P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) + \ldots + P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_{n-1} \cap A_n)$$

$$\le \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + P(A_3) + \ldots + \mathrm{P}(A_n)$$

h) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ olsun.

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(A_1) + P(\bar{A}_1 \cap A_2) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) + \ldots + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_{n-1} \cap A_n) + \ldots \quad \text{(seri)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(A_1) + P(\bar{A}_1 \cap A_2) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) + \ldots + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_{n-1} \cap A_n)$$

(kısmi toplamlar dizisinin limiti)

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(A_1 \cup (\bar{A}_1 \cap A_2) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup \ldots \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_{n-1} \cap A_n)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

dır.

Şimdi $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ olsun. Bu durumda,

$$\bar{A}_1 \subset \bar{A}_2 \subset \cdots \subset \bar{A}_n \subset \cdots$$

olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} P(\bar{A}_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} 1 - P(A_n) = 1 - P(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n})$$

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$$

dır.

<u>Örnek</u> (Ω, U, P) bir olasılık uzayı ve $A,B \in U$ için $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$, $P(\bar{A} \cap B) = 0.3$ olmak üzere

a) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.5 = 0.5$

b) $P(A \cap B) = ?$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(B) - P(\bar{A} \cap B) = 0.4 - 0.3 = 0.1$$

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5+0.4-0.1=0.8$

d) $P(A \cup \bar{B}) = ?$

$$P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(B) - P(A \cap \bar{B})$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

$$P(A \cap \bar{B}) = 0.5 - 0.1 = 0.4$$

$$P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(B) - P(A \cap \bar{B}) = 0.5+0.4-0.4=0.5$$

e) $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.1 = 0.9$

f) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.1 = 0.9$