Teorem: (Ω, U, P) bir olasılık uzayı ve $P(B) \geq 0$ olmak üzere,

$$P_B : U \to \mathbb{R}$$

$$A \to P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

fonksiyonu U da bir olasılık ölçüsüdür.

İspat: i) $\forall A \in U$ için $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$

ii) $P_B(\Omega) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{p(B)} = 1$

iii) $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ ler U 'da ayrık olaylar olduğunda,

$$P_B(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P_B(A_1 \cup A_2 \cup ...)$$

$$= \frac{\mathrm{P}[(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup ...) \cap B]}{\mathrm{P}(B)}$$

$$= \frac{\mathrm{P}[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup ... \cup (A_n \cap B) \cup ...]}{\mathrm{P}(B)}$$

$$= \frac{\mathrm{P}(A_1 \cap B) + \mathrm{P}(A_2 \cap B) + ...}{\mathrm{P}(B)} = \mathrm{P}_B(A_1) + \mathrm{P}_B(A_2) + ...$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_B(A_n)$$

(Ω, U, P) bir olasılık uzayı, $B \in U$, $P(B) > 0$ olmak üzere $P(A \cap B)/P(B)$ değerine A nın B ye göre **koşullu olasılığı** denir. Koşullu olasılık genellikle $P(A/B)$ biçiminde gösterilir.

Teorem: (Ω, U, P) 'de $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$ olsun.

A ile B bağımsız $\Leftrightarrow P(A) = \mathrm{P}(A/B) \Leftrightarrow \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B/A)$

dır.

İspat: (Ödev)

Bazı Formüller:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1) = P(A_2)P(A_1/A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/(A_1 \cap A_2))$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/(A_1 \cap A_2))...P(A_n/(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}))$$

(Ω, U, P) bir olasılık uzayı ve $A_1, A_2, ..., A_n \in U$ olsun.

a) $P(A_i) \neq 0, i = 1, 2, ..., n$

b) $A_i \cap A_j = \varnothing, 1 \leq i < j \leq n$ ($A_1, A_2, ..., A_n$ ler ayrık)

c) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$

olmak üzere $A_1, A_2, ..., A_n$ olaylarına Ω nın bir parçalanması (sonlu parçalanma) denir.

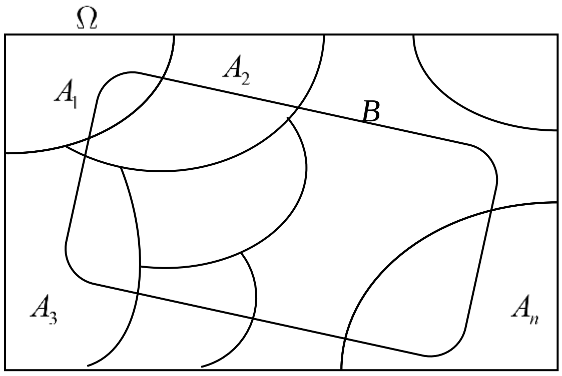
$A_1, A_2, ..., A_n, ... \in U$ olmak üzere,

a) $P(A_i) \neq 0, i = 1, 2, ...$

b) $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i < j = 1, 2, 3, ...$ ($A_1, A_2, ..., A_n, ...$ ler ayrık)

c) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup ... = \Omega$

olmak üzere $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ olaylarına Ω nın bir parçalanması (sonsuz parçalanma) denir.



$$B = B \cap \Omega = B \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ... \cup (B \cap A_n)$$

$$B = B \cap \Omega = B \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (B \cap A_i) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ... \cup (B \cap A_n) \cup ...$$

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B / A_i)$$

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (B \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) P(B / A_i)$$

Bayes Teoremi: (Ω, U, P) bir olasılık uzayı olsun.

$A_1, A_2, ..., A_n$ olayları Ω nın bir sonlu parçalanması ve $B \in U$, $P(B) \neq 0$ olmak üzere,

$$P(A_j / B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_j) P(B / A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B / A_i)} \quad , \quad j = 1, 2, ..., n$$

$A_1, A_2, ..., A_n, ...$ olayları Ω nın bir sonsuz parçalanması olmak üzere,

$$P(A_j / B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_j) P(B / A_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) P(B / A_i)} \quad , \quad j = 1, 2, ...$$

dır.

Problem Cıvata üretilen bir atölyede üç işçi çalışmaktadır. Birinci işçi üretimin %40 ını, ikinci işçi %35 ini ve üçüncü işçi %25 ini gerçekleştirmektedir. Birinci işçi cıvatalardan %5 ini, ikinci işçi %4 ünü ve üçüncü işçi %2 ini bozuk üretmektedir. Bu atölyede üretilen cıvatalardan rasgele seçilen bir cıvatanın bozuk olduğu görüldüğünde birinci işçi tarafından üretilmiş olması olasılığı nedir?

A_1-seçilen cıvatanın birinci işçi tarafından üretilmiş olması olayı

A_2-seçilen cıvatanın ikinci işçi tarafından üretilmiş olması olayı

A_3-seçilen cıvatanın üçüncü işçi tarafından üretilmiş olması olayı

B-seçilen cıvatanın bozuk olması olayı

olsun. Buna göre sorulan olasılık,

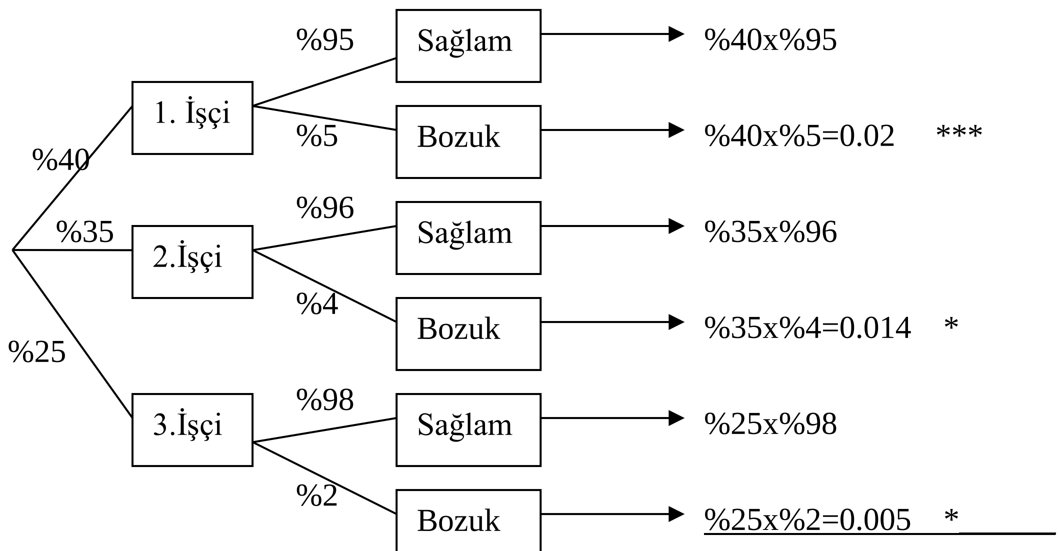
$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3)}$$

$$= \frac{\%40 \times \%5}{\%40 \times \%5 \ + \ \%35 \times \%4 \ + \ \%25 \times \%2} = \frac{0.02}{0.02 + 0.014 + 0.005} = \frac{20}{39}$$

dır.

Ağaç Diyagramı yardımıyla çözüm:

<u>Yolların Olasılıkları</u>



$$\frac{***}{***+*+*} = \frac{0.02}{0.02 + 0.014 + 0.005}$$