GEOMETRİK OLASILIK

$\Omega \neq \emptyset$, herhangi bir küme, U, Ω da bir σ-cebir ve

$$\begin{array}{rccl} m: & U & \rightarrow & \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ & A & \rightarrow & m(A) \end{array}$$

fonksiyonu için :

1) $m(A) \geq 0, \forall A \in U$

2) $m(\emptyset) = 0$

3) $(A_n), U$ da ayrık kumelerin dizisi iken $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$

özellikleri sağlandığında m ye U da bir **ölçü** denir. Ölçü kavramı Matematiğin bir kavramıdır.Uzunluk, alan, hacim ölçüleri buna birer örnektir.

Bir m ölçüsü için, $m(\Omega) < \infty$ (sonlu) olduğunda,

$$\begin{array}{rccl} P: & U & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \rightarrow & P(A) = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)} \end{array}$$

olarak tanımlanan P fonksiyonu U da bir olasılık ölçüsüdür.

Herhangi bir m ölçüsü için $B \in U$ ve $m(B) < \infty$ olsun.

$$U_B = \{A : A = B \cap C, C \in U\}$$

olmak üzere,

$$\begin{array}{rccl} P_B: & U_B & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \longrightarrow & P_B(A) = \dfrac{m(A)}{m(B)} \end{array}$$

fonksiyonu U_B de bir olasılık ölçüsüdür.

Şimdi geometrik olasılık diye bilinen ve uzunluk, alan, hacim yardımıyla tanımlanan olasılık ölçülerine değinelim. $N, M \in \mathbb{R}$, $N < M$ için $\Omega = [N, M]$ aralığını göz önüne alalım. $A \subset \Omega$ bir aralık olduğunda,

$$P(A) = \frac{A \text{ nın aralık uzunluğu}}{\Omega \text{ nın aralık uzunluğu}}$$

ve diğer $A \subset \Omega$ altkümeleri (aralıkların birleşimi, kesişimi, tümlemesi türünden olanlar) için

$$P(A) = \frac{\text{"}A \text{ nın uzunluk ölçüsü"}}{\Omega \text{ nın aralık uzunluğu}}$$

olarak tanımlanabilir. Buradaki Ω ‘nın bir olasılık deneyinin Örnek Uzayı olduğunu göz önünden kaçırmayın.

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, sonlu alanlı bir küme olmak üzere

$$P(A) = \frac{''A \text{ nın alan ölçüsü}''}{''\Omega \text{ nın alan ölçüsü}''}$$

ve $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, sonlu hacimli bir küme olmak üzere,

$$P(A) = \frac{''A \text{ nın hacim ölçüsü}''}{''\Omega \text{ nın hacim ölçüsü}''}$$

olarak tanımlanabilir. Bu olasılık ölçüleri, bir birim olasılığın Ω üzerinde düzgün olarak dağıldığı durumlar için kullanışlıdır.

Örnek: $\Omega = \{(x,y): (x,y) \in R^2,\ x^2 + y^2 \leq 9\}$

$$P(A) = \frac{''A \text{ nın alan ölçüsü}''}{''\Omega \text{ nın alan ölçüsü}''}$$

olmak üzere,

$$A = \{(x,y): 0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\} \text{ için } P(A) = \frac{4}{9\pi}$$

$$B = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ için } P(B) = \frac{1}{9}$$

$$C = \{(x,y): (x,y) \in \Omega,\ x = y\} \text{ için } P(C) = 0$$

dır.

Örnek: Yarıçapı 1 birim olan dairesel ince madeni bir pul, taban yarıçapı 3 birim olan bir silindirin içine atıldığında tabanın merkezini örtmesi olasılığı nedir?

a) Pulun, tabanın merkez noktasını örtmesi için, pulun merkezi ile tabanın merkez noktası arasındaki uzaklığın 1 birimden küçük olması gerekir. Pulun merkezi ile tabanın merkezi arasındaki uzaklık d olmak üzere $0 \leq d \leq 2$ dir. Deneyin sonuçlarının kümesi

$$\Omega_1 = \{d : 0 \leq d \leq 2\}$$

ve

$$P_1(A) = \frac{\text{"}A \text{ nın uzunluk ölçüsü"}}{\Omega \text{ nın aralık uzunluğu}}$$

olmak üzere, pulun taban merkezini örtmesi olayı için,

$$A = \{d : 0 \leq d \leq 1\}$$

$$P_1(A) = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

b) Silindirin tabanında, başlangıç noktası silindirin merkezi ile çakışan bir dik koordinat sistemi ele alalım. Bu koordinat sistemine göre pulun merkez noktasının koordinatlarını (x, y) ile gösterelim. Deneyin sonuçlarının kümesi

$$\Omega_2 = \ (x, y): x^2 + y^2 \leq 4$$

ve

$$P(A) = \frac{''A \text{ nın alan ölçüsü}''}{''\Omega \text{ nın alan ölçüsü}''}$$

olmak üzere, pulun taban merkezini örtmesi olayı için

$$A = \ (x, y): x^2 + y^2 \leq 1$$

$$P_2(A) = \frac{\pi \times 1^2}{\pi \times 2^2} = \frac{1}{4}$$

elde edilir.

Görüldüğü gibi modeller farklı sonuçlar vermektedir. Bu deney için başka modeller de oluşturulabilir. Bu modellerden hangisi deneyimize "uygundur"? Pulu çok defa attığımızda olaya uygun sonuçların sayısının atış sayısına oranı bize yardımcı olabilir. Ancak her atıştan sonra oranın bir öncekine göre değişmesi, belli sayıda atış yeniden yapıldığında aynı oranın elde edilmemesi gibi sorunlar ortaya çıkacaktır. Bu tür sorunların daha ileri düzeyde İstatistik bilgisinden sonra açıklığa kavuşacağını yeniden hatırlatalım. Şimdilik amacımız, olasılık uzayı yani model verildiğinde, olasılık hesabı yapabilmektir.

Beli bir (Ω, U, P) olasılık uzayı bir olasılık deneyinin modeli olarak kullanıldığında U σ-cebirindeki kümeler deney ile ilgili olaylara karşılık gelecektir. Bu σ-cebir her zaman kuvvet kümesi olmak zorunda değildir. Örneğin bir olasılık deneyinde sadece beli bir A olayının gerçeklenip gerçeklenmediği ile ilgileniyorsak σ-cebir olarak $\{\Omega, \emptyset, A, \overline{A}\}$ yı almamız yeterlidir. Eğer bir olasılık deneyinde tüm olaylar ile ilgileniyorsak σ-cebir olarak Ω nın kuvvet kümesini almalıyız. Bir σ-cebir sayılabilir birleşim, sayılabilir kesişim ve tümlemeye göre kapalıdır. $A \in U$ için A olayının gerçekleşmesi demek deney sonucunun A nın elemanı olması demektir. $A, B \in U$ için,

$$A \cup B = \{\omega: \ \omega \in \Omega \ , \ \omega \in A \text{ veya } \omega \in B\}$$

$$A \cap B = \{\omega: \ \omega \in \Omega \ , \ \omega \in A \text{ ve } \omega \in B\}$$

$$\overline{A} = \{\omega: \ \omega \in \Omega \ , \ \omega \notin A\}$$

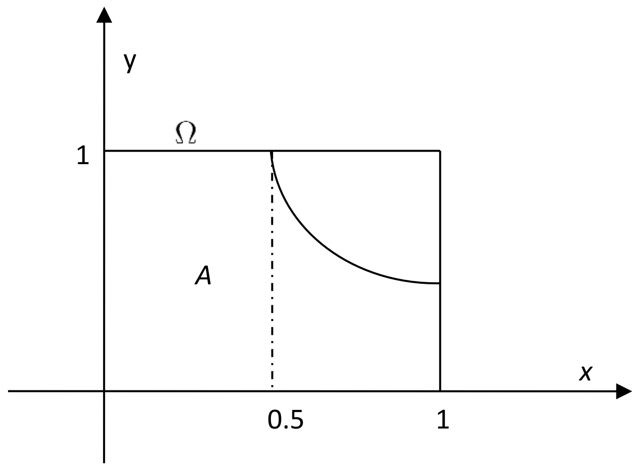
olduğu göz önüne alınırsa $A \cup B$ olayının gerçekleşmesi demek A ve B olaylarından enaz birinin gerçekleşmesi, $A \cap B$ olayının gerçekleşmesi demek A ve B olaylarının her ikisinin de gerçekleşmesi, $\overline{A}$ olayının gerçekleşmesi demek A nın gerçekleşmemesi demektir. Bu hatırlatmaları göz önünde tutarak aşağıdaki çözülmüş problemleri inceleyiniz.

Problem (0,1) aralığındaki reel sayılardan rasgele iki sayı seçildiğinde çarpımlarının 0.5 den küçük olması olasılığı nedir?

Örnek Uzay: $\Omega = \ (x,y):0<x<1\,,\ 0<y<1$

Olasılık Ölçüsü: $P(A)=\dfrac{"A\text{nın alan ölçüsü}"}{"\Omega\text{nın alan ölçüsü}"}$

İlgilendiğimiz olay: $A=\left\{(x,y):0<x<1\,,\ 0<y<1\,,\ xy<\dfrac{1}{2}\right\}$



$$P(A)=\frac{"A\text{nın alan ölçüsü}"}{"\Omega\text{nın alan ölçüsü}"}$$

$$=\frac{0.5\times 1+\int_{0.5}^{1}\frac{1}{2x}dx}{1}=0.5+\frac{1}{2}\ln x\Big|_{x=0.5}^{1}=0.5+\frac{1}{2}(\ln 1-\ln\frac{1}{2})=\frac{1+\ln 2}{2}\approx 0.84657$$