Çözülmüş Problemler:

Problem Bir tavla zarının bir kez atılması deneyinde örnek uzay $\{1,2,3,4,5,6\}$ olsun. Buna göre, bir zar iki kez ardı ardına atıldığında örnek uzay,

$$S=\{(x,y): x,y=1,2,3,4,5,6\}$$

$$=\begin{matrix} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ (4,1), & (4,2), & (4,4), & (4,5), & (4,6), & (4,7), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{matrix}$$

ve $n(S)=36$ dır. $U=P(S)$ ve $P(A)=n(A)/36$ olarak tanımlanan (S,U,P) olasılık uzayını deneyin bir modeli olarak kullandığımızda, örneğin üste gelen sayılar toplamının 9 'dan büyük olma olayı,

$$A=\{(5,5),(6,4),(4,6),(5,6),(6,5),(6,6)\}$$

olmak üzere, bu olayın olasılığı

$$P(A)=n(A)/36=6/36=1/6$$

dır.

Birinci atışta gelen sayının ikinci atışta gelen sayıdan farklı olması olayı $B=\{(x,y)\in S: x\neq y\}$ olmak üzere $n(B)=30$ ve $P(B)=30/36=5/6$ dır.

Birinci veya ikinci atışta çift sayı gelmesi olayının olasılığını hesaplamak için

$C-$ 1. atışta çift sayı gelmesi

$D-$ 2. atışta çift sayı gelmesi

olaylarını tanımlayalım. O zaman aranan olasılık

$$P(C\cup D)=P(C)+P(D)-P(C\cap D)$$

$$=\frac{18}{36}+\frac{18}{36}-\frac{9}{36}=\frac{27}{36}$$

veya

$$P(C\cup D)=1-P(\overline{C\cup D})=1-P(\overline{C}\cap\overline{D})=1-\frac{9}{36}=\frac{27}{36}$$

dır.

Gelen sayılar toplamının 9 'dan büyük olduğu bilindiğinde, birinci atışta 6 gelmiş olması olasılığı nedir? E olayı birinci atışta 6 gelmesi olayı olsun. Sorulan olasılık,

$$P(E/A)=\frac{P(E\cap A)}{P(A)}=\frac{3/36}{1/6}=\frac{1}{2}$$

dır.

A,B,C,D,E olaylarının bağımsızlığını araştıralım.

$$P(A\cap B)=\frac{4}{36}$$
$$P(A).P(B)=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$$
olup *A* ile *B* bağımsız değildir.

$$P(A\cap C)=\frac{4}{36}$$
$$P(A).P(C)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}$$
olup *A* ile *C* bağımsız değildir.

$$P(A\cap D)=\frac{4}{36}$$
$$P(A).P(D)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}$$
olup *A* ile *D* bağımsız değildir.

$P(E/A)=\frac{P(E\cap A)}{P(A)}=\frac{3/36}{1/6}=\frac{1}{2}\neq P(E)=\frac{1}{6}$ olduğundan *A* ile *E* bağımsız değildir.

$$P(B\cap C)=\frac{15}{36}$$
$$P(B).P(C)=\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}$$
olup *B* ile *C* bağımsız değildir.

$$P(B\cap D)=\frac{15}{36}$$
$$P(B).P(D)=\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}$$
olup *B* ile *D* bağımsız değildir.

$$P(B\cap E)=\frac{5}{36}$$
$$P(B).P(E)=\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$$
olup *B* ile *E* bağımsız olaylardır.

$$P(C\cap D)=\frac{9}{36}$$
$$P(C).P(D)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$
olup *C* ile *D* bağımsız olaylardır.

.

$$P(C\cap E)=\frac{1}{36}$$
$$P(C).P(E)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}$$
olup C ile E bağımsız olaylar değildir.

$$P(D\cap E)=\frac{3}{36}$$
$$P(D).P(E)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}$$
olup D ile E bağımsız olaylardır.

$$P(A\cap B\cap C)=\frac{2}{36}$$
$$P(A).P(B).P(C)=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}$$
olup A,B,C olayları 3-lü bağımsız değildir.

$$P(A\cap B\cap C\cap D)=\frac{2}{36}$$
$$P(A).P(B).P(C)P(D)=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$
olup A,B,C,D olayları 4-lü bağımsız değildir.

$$P(A\cap B\cap C\cap D\cap E)=\frac{1}{36}$$
$$P(A).P(B).P(C)P(D).P(E)=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}$$
olup A,B,C,D,E olayları 5-li bağımsız değildir.

$$P(C\cap D\cap E)=\frac{3}{36}$$
$$P(C).P(D).P(E)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}$$
olup C,D, E olayları 3-lü bağımsız değildir.

Daha kaç tane karşılaştırma yapılacaktır? 5 tane olay için 31 tane eşitliğin karşılaştırılması gerekmektedir.

Problem a,b,c,d harfleri 4 ayrı kağıt parçasına yazılsın ve bir kavanoza atılsın:

1) çekileni geri atma şartıyla ardarda,
2) çekileni geri atmama şartıyla ardarda,
3) aynı anda

üç tane kağıt parçası çekilsin. Bu deneylerin Örnek uzayları sırasıyla

$$S_1=\{a,b,c,d\}\times\{a,b,c,d\}\times\{a,b,c,d\}$$
$$=\{(x,y,z):x,y,z\in\{a,b,c,d\}\}$$

$$S_2=\{(x,y,z):x,y,z\in\{a,b,c,d\},\ x\neq y,\ x\neq z,\ y\neq z\}$$

$$S_3=\{\{x,y,z\}:\{x,y,z\}\subset\{a,b,c,d\}\}$$

olmak üzere $n(S_1)=4\times 4\times 4=64$, $n(S_2)=4\times 3\times 2=24$, $n(S_3)=4$ dır.
* Bu deneylerin her biri için; çekilişlerde a harfinin kavanozdan alınmamış olması olayının olasılığını hesaplayalım.
1. deney için olay

$$A=\{b,c,d\}\times\{b,c,d\}\times\{b,c,d\}$$

olmak üzere,

$$P_1(A)=\frac{n(A_1)}{n(S_1)}=\frac{3\times 3\times 3}{64}=\frac{27}{64}$$

2. deney için olay

$$B=\{(x,y,z)\in S_2 : x,y,z\in\{b,c,d\}\}$$

olmak üzere,

$$P_2(B)=\frac{n(B)}{n(S_2)}=\frac{3\times 2\times 1}{24}=\frac{1}{4}$$

3. deney için olay

$$C=\{\{b,c,d\}\}$$

olmak üzere,

$$P_3(C)=\frac{n(C)}{n(S_3)}=\frac{1}{4}$$

dır.
* Çekilen üç harfin de aynı harf olması olayını göz önüne alırsak, 1.deney için olay,

$$A=\{(a,a,a),(b,b,b),(c,c,c),(d,d,d)\}$$

ikinci deney için $B=\varnothing$ ve üçüncü deney için $C=\varnothing$ olmak üzere olasılıklar

$$P_1(A)=\frac{4}{64},P_2(B)=0,P_3(C)=0$$

olacaktır.

* Çekilen üç harf arasında a veya b nin gelmesi olayı; 1. deney için

$$A=S_1\setminus\{c,d\}\times\{c,d\}\times\{c,d\}$$

olmak üzere,

$$P_1(A)=\frac{n(A)}{n(S_1)}=1-\frac{8}{64}=\frac{7}{8}$$

2. deney için $B=S_2$, $P(B)=1$ ve 3. deney için $C=S_3$ olmak üzere, $P(C)=1$ dır.

* İlk önce a sonra b ve sonra c nin çekilmesi olayı;
1. deney için $A=\{(a,b,c)\}$ olmak üzere $P_1(A)=1/64$,
2. deney için $B=\{(a,b,c)\}$ olmak üzere $P_2(B)=1/24$,
3. deney için böyle bir olay tanımsızdır.

* E, 1. deneyde çekilen harflerin birbirinden farklı ve alfabetik sıraya göre çekilmesi olayı olmak üzere,

$$P_1(E)=\frac{n(E)}{n(S_1)}=\frac{4\times 3\times 2\times 1 3!}{64}=\frac{1}{16}$$

dır.
* D, 2). deneyde b harfinin 2. çekilişte gelmesi olayı olmak üzere

$$P_2(D)=\frac{n(D)}{n(S_2)}=\frac{3\times1\times2}{24}=\frac{1}{4}$$

dır.
* F, 3).deneyde a ve b harflerinin çekilmesi olmak üzere

$$P_3(F)=\frac{n(F)}{n(S_3)}=\frac{\binom{2}{2}\binom{2}{1}}{\binom{4}{3}}=\frac{1}{2}$$

dır.

Problem Bir kavanozda k tane kırmızı ve b tane beyaz top bulunsun. Bir top çekilip rengine bakıldıktan sonra bu renkten başka c tane top ile birlikte kavanoza geri atılsın.
$B_i,\ i=1,2,\quad i.$ çekilişte beyaz top gelmesi olayı,
$K_i,\ i=1,2,\quad i.$ çekilişte kırmızı top gelmesi olayı
olmak üzere:

$$P(K_1)=\frac{k}{b+k},P(B_1)=\frac{b}{b+k}$$

$$P(K_2)=P[(K_1\cup B_1)\cap K_2]=P(K_1\cap K_2)+P(B_1\cap K_2)$$

$$=P(K_1)\times P(K_2/K_1)+P(B_1)\times P(K_2/B_1)$$

$$=P(K_1).P(K_2/K_1)+P(B_1).P(K_2/B_1)$$

$$=\frac{k}{b+k}\frac{k+c}{b+k+c}+\frac{b}{b+k}\frac{k}{b+k+c}$$

$$=\frac{k}{b+k}$$

$$P(B_2)=1-P(K_2)=\frac{b}{b+k}$$

Görüldüğü gibi $P(B_1)=P(B_2)$ ve $P(K_1)=P(K_2)$ dır. Bir top çekilip rengine bakıldıktan sonra bu renkten başka c tane top ile birlikte kavanoza geri atıldığında olasılıklar değişmemektedir.

Şimdi ikinci çekilişte topun kırmızı olduğu bilindiğinde birinci çekilen topun kırmızı olması olasılığını hesaplayalım.

$$P(K_1/K_2)=\frac{P(K_1\cap K_2)}{P(K_2)}=\frac{k+c}{b+k+c}$$

Buradan,

$$P(B_1/K_2)=1-P(K_1/K_2)=\frac{b}{b+k+c}$$

dır.

Problem $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ rakamları ile oluşturulan, farklı rakamlı 6 basamaklı sayılardan biri rasgele seçildiğinde:

a) Çift sayı olması olasılığı nedir?

S kümesi $1,2,\ldots,9$ rakamları ile oluşturulan farklı rakamlı 6 basamaklı sayıların kümesi (Örnek Uzay) olmak üzere,

$$n(S) = 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4$$

dır. Çekilen sayının çift sayı olması olayı,

$$A = \{x \in S : x \text{ çift sayı}\}$$

olmak üzere,

$$n(A) = 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 4$$

dır. A olayının olasılığı,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{9}$$

dır.

Bundan sonraki şıklarda Örnek Uzayı yazmayacağız.

b) Rakamlar toplamının çift sayı olması olasılığı nedir?

$$B = \{x \in S : x \text{ in rakamları toplamı cift sayı}\}$$

ve $k = 1,2,3,4$ için

$$B_k = \{x \in S : x \text{ sayısının } k \text{ tane rakamı cift}\}$$

olmak üzere,

$$B = B_2 \cup B_4$$

$$n(B) = n(B_2) + n(B_4)$$

$$= \binom{4}{2}\binom{5}{4}\times 6! + \binom{4}{4}\binom{5}{2}\times 6! = 40\times 6!$$

ve

$$P(B) = \frac{40\times 6!}{9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4} = \frac{40\times 3!}{9\times 8\times 7} = \frac{10}{21}$$

dır.

c) Çift rakamların yan yana (bir arada) olması olasılığı nedir?

$$C = \{x \in S : x \text{ deki cift rakamlar yanyana}\}$$

olmak üzere,

$$C = C\cap S = C\cap(B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4)$$

$$= (C\cap B_1)\cup(C\cap B_2)\cup(C\cap B_3)\cup(C\cap B_4)$$

$$n(C) = n(C\cap B_1) + n(C\cap B_2) + n(C\cap B_3) + n(C\cap B_4)$$

$$= \binom{4}{1}\binom{5}{5}6! + \binom{4}{2}\binom{5}{4}5!2! + \binom{4}{3}\binom{5}{3}4!3! + \binom{4}{4}\binom{5}{2}3!4!$$

ve

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{24\times 6!}{9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4}=\frac{2}{7}$$

dır.

d) 3 tane rakamı tek, 3 tane rakamı çift veya 8 rakamını içermesi olasılığı nedir?

$$D=\{x\in S: x, 8 \text{ rakamını icerir}\}$$

olmak üzere

$$D_1=B_3\cup D$$

olayının olasılığı,

$$P(D_1)=P(B_3)+P(D)-P(B_3\cap D)$$

$$=\frac{n(B_3)+n(D)-n(B_3\cap D)}{n(S)}$$

$$=\frac{\binom{4}{3}\binom{5}{3}6!+\binom{1}{1}\binom{8}{5}6!-\binom{1}{1}\binom{3}{2}\binom{5}{3}6!}{9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4}$$

$$=33/42$$

dır.

e) Çift sayı olması veya 8 rakamını içermesi olasılığı nedir?

$$E=A\cup D$$

olmak üzere aranan olasılık

$$P(E)=P(A)+P(D)-P(A\cap D)$$

$$=\frac{4}{9}+\frac{\binom{1}{1}\binom{8}{5}6!}{n(S)}-\frac{8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 1+\binom{1}{1}\binom{7}{4}4!3}{n(S)}$$

dır.

f) Rakamları azalan veya artan sırada olması olasılığı nedir?

$$F=\{x\in S: x \text{ deki rakamlar azalan veya artan sırada}\}$$

olmak üzere

$$n(F)=9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times\frac{2}{6!}$$

ve

$$P(F=\frac{2}{6!}=\frac{1}{360}$$

dır.

g) 3 tane rakamı tek, 3 tane rakamı çift, tek rakamlar azalan ve çift rakamlar azalan sırada olması olasılığı

$$\frac{\binom{4}{3}\binom{5}{3}6!\times 13!\times 13!}{n(S)}$$

dır.

h) 3 tane rakamı tek, 3 tane rakamı çift olması, aynı cinsten iki rakamın yanyana olmaması ve sayıdaki en büyük tek rakamın teklere göre en sağda olması olasılığı

$$\frac{\binom{4}{3}\binom{5}{3}[3!\times 3!]\times 2\times 23!}{n(S)}$$

dır.

i) Yan yana iki çift rakam bulunmaması olasılığı nedir?

$$I=\{x\in S: x \text{ de yanyana iki cift rakam yok}\}$$

$$I=(I\cap B_1)\cup(I\cap B_2)\cup(I\cap B_3)$$

olmak üzere

$$n(I)=\binom{4}{1}\binom{5}{5}6!+\binom{4}{2}\binom{5}{4}4!\binom{5}{2}2!+\binom{4}{3}\binom{5}{3}3!\binom{4}{3}3!$$

ve

$$P(I)=\frac{n(I)}{n(S)}$$

dır.

j) Rakamlar toplamının en az 23 olması olasılığı nedir?

$K-$ rakamlar toplamının en az 23 olması olayı olmak üzere

$$P(K)=1-P(\overline{K})$$

$$=1-\left(\frac{6!}{n(S)}+\frac{6!}{n(S)}\right)$$

$$=\frac{41}{42}$$

dır.

Problem Elimizde, $1,2,3,...,n$ sayıları ile numaralanmış n tane top ve n tane kutu bulunsun. Bir topun numarası içinde bulunduğu kutunun numarasına eşitse bu durumda bir "eşleşme" vardır denir.

a) n tane top n tane kutuya her kutuda bir top bulunacak şekilde rasgele atıldığında en az bir eşleşme olması olasılığı nedir?

n tane farklı (numaralanmış) top n tane farklı (numaralanmış) kutuya her kutuda bir top bulunacak şekilde $n!$ biçimde atılabilir. Örnek Uzayın eleman sayısı $n!$ dir.

A_i , $i = 1,2,3,...,n$ olayı *i*. kutu için eşleşme olması olayı olsun.

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \quad , \ 1 \le i \le n$$

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{(n-1)n} \quad , \ 1 \le i < j \le n$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{(n-2)(n-1)n} \quad , \ 1 \le i < j < k \le n$$

$$...$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = \frac{1}{n!}$$

olmak üzere, en az bir eşleşme olması olayının olasılığı,

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

$$= n \times \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \times \frac{1}{(n-1)n} + \binom{n}{3} \times \frac{1}{(n-2)(n-1)n} - ... + (-1)^{n-1} \binom{n}{n} \times \frac{1}{n!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - ... + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} + ...$$

dır.

B-hiçbir eşleşme olmaması olayı olsun. Bu olayın olasılığı,

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)$$

$$= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

B olayının olasılığını p_n ile gösterelim.

$$p_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

olmak üzere,

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!} + ...$$

sayısı göz önüne alınırsa, p_n olasılığı e^{-1} sayısının seri açılımındaki $(n+1)$. kısmi toplamdır. $1 - e^{-1} \cong 0.6321$ ve $1 - p_3 \cong 0.6677$, $1 - p_4 \cong 0.6250, 1 - p_5 \cong 0.6333$ $, 1 - p_6 \cong 0.6320$ olmak üzere, $1 - p_n$ nin değerleri küçük n ler için bile $1 - e^{-1}$ değerine yakındır. Böylece en az bir eşleşme olması olasılığının pratik olarak n den $(n > 5)$ bağımsız olduğunu ve yaklaşık olarak 0.6321 olduğunu söyleyebiliriz.

b) n tane top, her bir kutuda bir top olacak şekilde, n kutuya rasgele atıldığında tam r $(1 \le r \le n)$ tane eşleşme olması olasılığı nedir?

$r = n$ için bu olasılık $\dfrac{1}{n!}$ dır. $r = n-1$ durumu söz konusu olamaz, çünkü $n-1$ tane kutuda kendi numaralarına karşılık gelen toplar bulunuyorsa geriye kalan kutuda da bir eşleşme vardır. $r = 1,2,...,n-2$ için B_r olayı, tam r tane eşleşme olması olayı olsun. Bir an için r tane eşleşmenin $1,2,...,r$ numaralı kutularda olduğunu düşünelim. Diğer $n-r$ kutuda hiçbir eşleşme olmayacak şekilde farklı düzenlemelerin sayısı $(n-r)!\,p_{n-r}$ olacaktır. Buradan,

$$P(B_r) = \binom{n}{r}\frac{(n-r)!\,p_{n-r}}{n!} = \frac{1}{r!}\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+...+(-1)^{n-r}\frac{1}{(n-r)!}\right)\ ,\ r = 1,2,...n-2$$

dır.

Problem $1,2,\ldots,n$ sayıları ile numaralanmış *n* tane kutu ve özdeş *k* tane top göz önüne alalım. *k* tane özdeş top *n* farklı kutuya kaç yolda dağıtılabilir? (Boş kutu kalabileceği gibi topların tümü bir tek kutuda da olabilir.)

Kutular numara sırasına göre yan yana dizildikten sonra aralarına birer ayıraç (levha) konsun ve sadece *k* tane top ile n - 1 tane ayıraç göz önüne alınsın. Aşağıdaki gibi bir durum,

$$000|\ |00|0|\ |...|0|$$

1 numaralı kutuda 3, 2 numaralı kutuda 0, 3 numaralı kutuda 2, dört numaralı kutuda 1, 5 numaralı kutuda 0, ..., *n*-1 numaralı kutuda 1 ve *n* numaralı kutuda 0 tane top olan dağılışı anlatmaktadır. Buna göre farklı dağılışların sayısı, *k* tanesi özdeş (top) ve *n*-1 tanesi özdeş (levha) olan n - $1 + k$ tane nesnenin farklı sıralanışlarının sayısı kadar olacaktır. Buna göre, *k* özdeş topun *n* farklı kutuya dağılışlarının sayısını $s(n,k)$ ile gösterilirse,

$$s(n,k) = \frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!} = \binom{\text{n - 1+ k}}{\text{k}}$$

dır.

Örneğin *n*=3, *k*=2 için dağılışlar;

1.	2.	3.
00		
	00	
		00
0	0	
0		0
	0	0

olmak üzere, dağılış sayısı $s(3,2)=\binom{3\text{-}1\text{+}2}{2} = 6$ dır.

n = 3, k = 3 için dağılışlar

1.	2.	3.
000		
	000	
		000
00	0	
00		0
	00	0

0	00	
1.	2.	3.

0		00
1.	2.	3.

	0	00
1.	2.	3.

0	0	
1.	2.	3.

olmak üzere, $s(3{,}3)=\binom{3\text{-}1\text{+}3}{3}=10$ dır.

10 özdeş top 5 farklı kutuya rasgele atıldığında (dağıtıldığında):

$$\text{Boş kutu kalmaması olasılığı} = \frac{\binom{5-1+7}{7}}{\binom{5-1+10}{10}}$$

$$\text{Topların hepsinin aynı kutuda olması olasılığı}=\frac{5}{\binom{5-1+10}{10}}$$

$$\text{Yalnız bir kutunun boş olması olasılığı}=\frac{\binom{5}{1}\binom{4-1+8}{8}}{\binom{5-1+10}{10}}$$

$$\text{Yalnız bir numaralı kutunun boş olması olasılığı}=\frac{\binom{4-1+6}{6}}{\binom{5-1+10}{10}}$$

$$\text{Yalnız iki kutunun boş olması olasılığı}=\frac{\binom{5}{2}\binom{3-1+7}{7}}{\binom{5-1+10}{10}}$$

Kutularda eşit sayıda top olması olasılığı= $\dfrac{1}{\dbinom{5-1+10}{10}}$

dır.

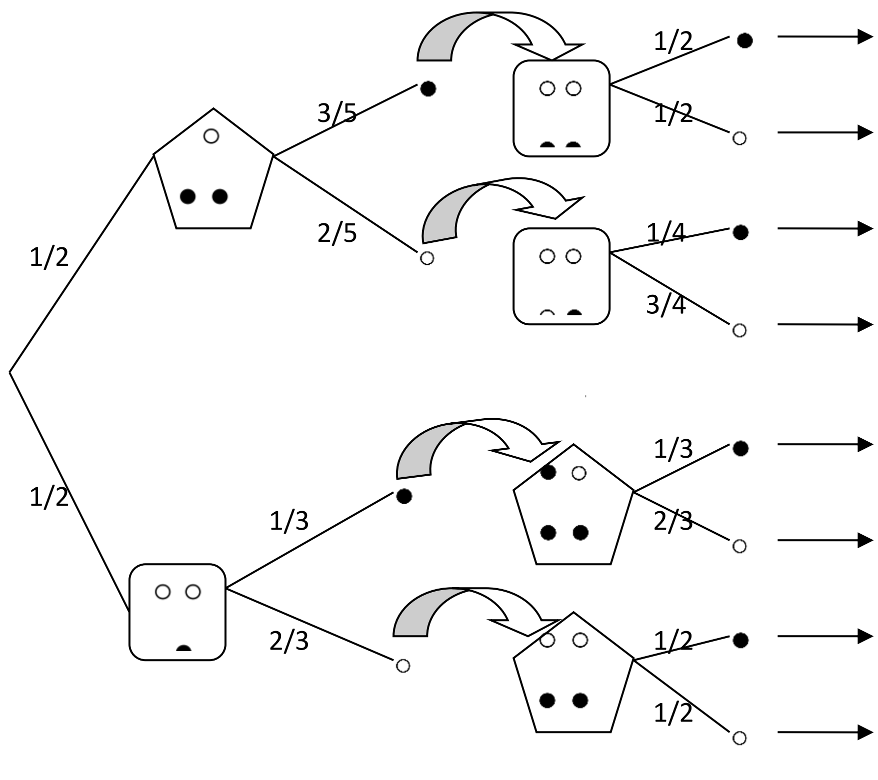
Problem Bir cam kavanozda 2 beyaz 3 siyah ve bir tahta kavanozda 2 beyaz 1 siyah top bulunmaktadır. Rasgele bir kavanoz seçilip içinden bir top çekilip diğer kavanoza atılmaktadır ve bu kavanozdan bir top çekilmektedir.

a) Çekilen her iki topun da siyah olması olasılığı nedir?

b) Çekilen ikinci topun siyah olduğu görüldüğünde birinci topun da siyah olması olasılığı nedir?

.

Yolların Olasılıkları



$\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$

a) $p = \frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{37}{90}$

b) $p = \dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}=\frac{37/90}{113/180}=\frac{74}{113}$