Tanım: P reel sayılardaki Borel Cebiri üzerinde bir Olasılık Ölçüsü olmak üzere,

$$\begin{array}{cccc} F: & \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ & x & \to & F(x) = P((-\infty, x]) \end{array}$$

fonksiyonuna P olasılık ölçüsüne karşılık gelen dağılım fonksiyonu veya kısaca dağılım fonksiyonu denir.

Teorem: P olasılık ölçüsüne karşılık gelen dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = P((-\infty, x]) \ , \ x \in \mathbb{R}$$

olmak üzere,

a) F azalmayan $(x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2))$,

b) F sağdan sürekli $(\lim\limits_{h\to 0^+} F(x+h) = F(x))$,

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} F(x) = 0 \ , \ \lim\limits_{x\to +\infty} F(x) = 1$

dır.

İspat:

a) $x_1 < x_2 \Rightarrow (-\infty, x_1] \subset (-\infty, x_2] \Rightarrow P((-\infty, x_1]) \le P((-\infty, x_2]) \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$

b) $A_n = \left(-\infty, x + \dfrac{1}{n}\right]$, $n = 1, 2, 3, ...$ için

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(\left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right]\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right]\right) = P\left((-\infty, x]\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} F(x + \frac{1}{n}) = F(x)$$

c) $A_n = (-\infty, -n]$, $n = 1, 2, 3, ...$ için

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P\left((-\infty, -n]\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty, -n]\right) = P(\varnothing) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} F(-n) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -\infty} F(x) = 0$$

$A_n = (-\infty, n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots \;\Rightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} P(A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} P\big((-\infty, n]\big) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, n]\right) = P(\Omega) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} F(n) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} F(x) = 0$$

Bir P olasılık ölçüsüne karşılık gelen F dağılım fonksiyonu azalmayan, sağdan sürekli, eksi sonsuzda limiti sıfır ve artı sonsuzda limiti bir olan bir fonksiyondur. Tersine, böyle bir F fonksiyonu yardımıyla,

$$P((-\infty, b]) = F(b) \quad , \quad (-\infty, b] \in \mathcal{B}$$

olacak şekilde bir olasılık ölçüsü tanımlanabilir. $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$P((a, b]) = F(b) - F(a)$$

$$P((a, \infty)) = 1 - F(a)$$

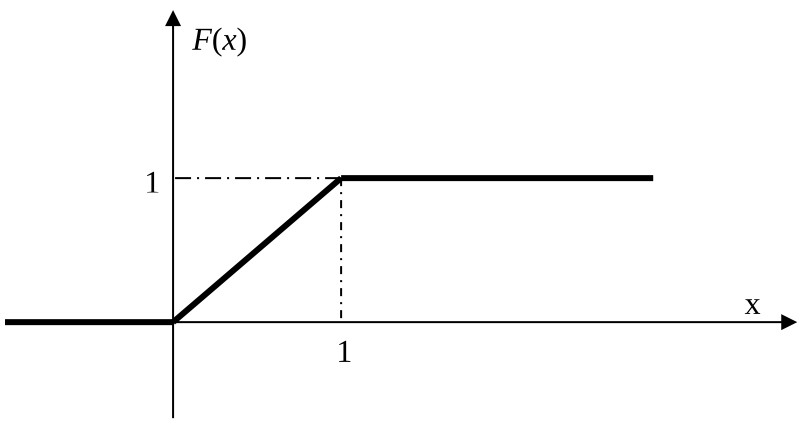
$$P(\{a\}) = F(a) - \lim_{h \to 0^+} F(a - h) = F(a) - F(a-)$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

<u>Örnek:</u>

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ x & , \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & , \quad x \ge 1 \end{cases}$$

fonksiyonu, azalmayan, sürekli ve $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = 1$ olan bir fonksiyon olup, dağılım fonksiyonu olma özelliklerini sağlamaktadır.



Bu dağılım fonksiyonuna karşılık gelen P olasılık ölçüsünü göz önüne alalım.

$$P\ \ 0.5\ \ = F\ \ 0.5\ - F\ \ 0.5^-\ = 0$$

$$P\ \ a\ \ = F\ \ a\ - F\ \ a^-\ = 0\ ,\ \forall a \in \mathbb{R}$$

$$P((-2,1/2]) = F(1/2) - F(-2) = 1/2$$

$$P((1/3,1/2]) = F(1/2) - F(1/3) = 1/2 - 1/3 = 1/6$$

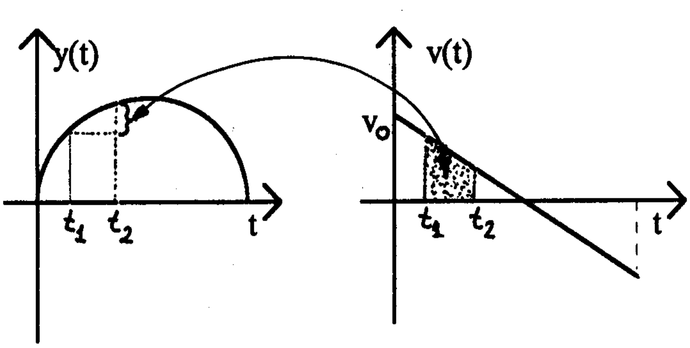
$$P([1/3,3]) = F(3) - \lim_{h\to 0^+} F(\frac{1}{3} - h) = 1 - 1/3 = 2/3$$

$$P((1/3,\infty)) = 1 - F(1/3) = 1 - 1/3 = 2/3$$

dır.

Dağılım fonksiyonunda olasılık hesabı yapmak, Fizik derslerinde gördüğünüz yol-zaman grafiğinde yol miktarını hesaplamaya benzemektedir.

<u>Hatırlatma:</u> Bir hareketin yol-zaman ve hız-zaman grafikleri aşağıdaki gibi olsun. Yol-zaman grafiğinde t_1 *anından* t_2 *anına kadar geçen zaman aralığındaki yol miktarı* $y(t_2) - y(t_1)$ *farkına eşittir. Bu yol miktarı hız-zaman grafiğinde* $\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ *alanına eşittir.*



Yol-zaman grafiği ya da hız-zaman grafiği tek başına hareketi anlatmaktadır. Birinden diğerine türev-integral alarak geçilmektedir. Bunlar hareketin birer matematiksel modelidir (anlatımıdır). Bu grafikler dik atış içindir. Modelden, cismin ne kadar bir yüksekliğe çıkabileceği, ne kadar bir zaman sonra yere düşeceği, yere düştüğü andaki hızı, belli bir anda bulunduğu konumu ve hızı gibi hareket ile ilgili sonuçlar elde edilebilir. Modelin verdikleri ile gerçek dünyada olup bitenlerin tamamıyla aynı olduğu söylenemez. Örneğin, başlangıç anında modelin anlattığına göre hız aniden v_0 *değerine ulaşmaktadır. Bu gerçek dünya ile ilgili gözlemlerimize ters düşmektedir. Gerçek dünyada neler olmaktadır? Bunların modeldeki yeri ne olabilir?*

Yukarıdaki F dağılım fonksiyonu $x = 0$ ve $x = 1$ noktaları dışında türevlenebilir. Bu iki nokta dışında, türev fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0\ , & -\infty < x < 0 \\ 1\ , & 0 < x < 1 \\ 0\ , & 1 < x < \infty \end{cases}$$

olmak üzere,

$$P((1/3,1/2]) = F(1/2) - F(1/3) = \int_{1/3}^{1/2} f(x)dx = \int_{1/3}^{1/2} 1.dx = 1/2 - 1/3 = 1/6$$

$$P\quad a\quad = F\ \ a\ - F\ \ a^{-}\ \ = \int_a^a f(x)dx = 0\ \ ,\ \ \forall a \in \mathbb{R}$$

dır. Bir F dağılım fonksiyonunun türevi olan f fonksiyonuna, hemen aşağıda, olasılık yoğunluk fonksiyonu diyeceğiz. Olasılık yoğunluk fonksiyonlarında olasılık hesabı, hız-zaman grafiğinde yol hesabına benzemektedir. Hız-zaman grafiğinde belli bir zaman aralığında alınan yol miktarı bir alana karşılık geldiği gibi, olasılık yoğunluk fonksiyonunda da bir aralığın olasılığı bir alana karşılık gelmektedir. Yalnız, olasılık yoğunluk fonksiyonları hiçbir zaman negatif değer almamaktadır.

Bir P olasılık ölçüsüne (olasılık dağılımına) karşılık gelen $F : R \to [0,1]$ dağılım fonksiyonu,

1) $f(x) \geq 0\ \ ,\ \ x \in \mathbb{R}$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

özelliklerine sahip bir f fonksiyonu yardımıyla,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

biçiminde yazılabiliyorsa, olasılık dağılımına sürekli dağılım ve f fonksiyonuna bu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu denmektedir. Sürekli bir dağılımın F dağılım fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca, $a < b\ \ ,\ a,b \in \mathbb{R}$ için

$$P((a,b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

$$P(\{a\}) = F(a) - \lim_{h \to 0^+} F(a-h) = F(a) - F(a^-) = 0$$

dır.

<u>Örnek:</u> Bir olasılık dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

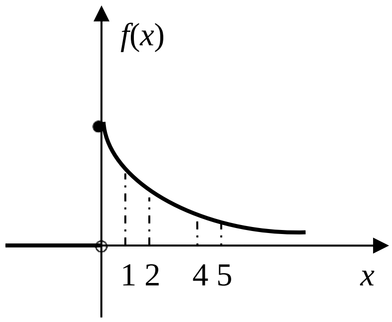
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}\ , & x \geq 0 \\ 0\ \ \ \ , & x < 0 \end{cases}$$

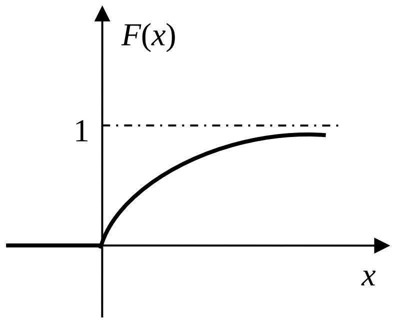
olsun. Bu dağılımın dağılım fonksiyonu,

$$F : \mathbb{R} \to [0,1]$$

$$x \to F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-x} dx = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ \displaystyle\int_0^x e^{-t} dt = \left. \frac{e^{-t}}{-1} \right|_{t=0}^{x} & , \ x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ 1 - e^{-x} & , \ x \geq 0 \end{cases}$$

dır.



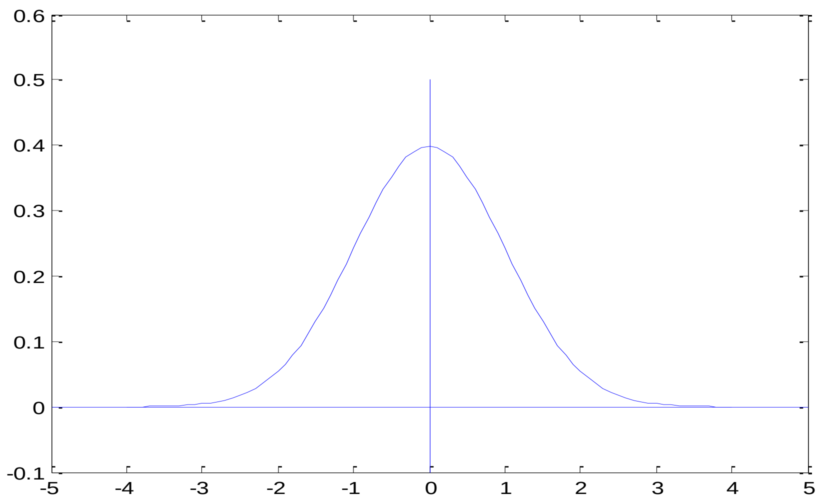


Bu olasılık dağılımında 1 birim olasılık $(0, \infty)$ aralığı üzerine dağılmıştır. Aynı uzunluklu olan $(1,2)$ ile $(4,5)$ aralıklarından ilkinin olasılığı daha büyüktür.

$$\int_1^2 e^{-x} dx = F(2) - F(1) > \int_4^5 e^{-x} dx = F(5) - F(4)$$

x-ekseninde sağa doğru gittikçe aralıkların (aynı uzunluklu) olasılıkları azalmaktadır, başka bir ifade ile x-ekseninde sağa doğru gittikçe yoğunluk azalmaktadır.

<u>Örnek:</u> Olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi olan bir dağılımda, olasılık sıfır etrafında yoğunlaşmış olup, $(-3,3)$ aralığının dışında olasılık hemen hemen sıfırdır. Olasılık yoğunluk fonksiyonu sıfıra göre simetriktir. Olasılığın %50 si sıfırın sağındadır.



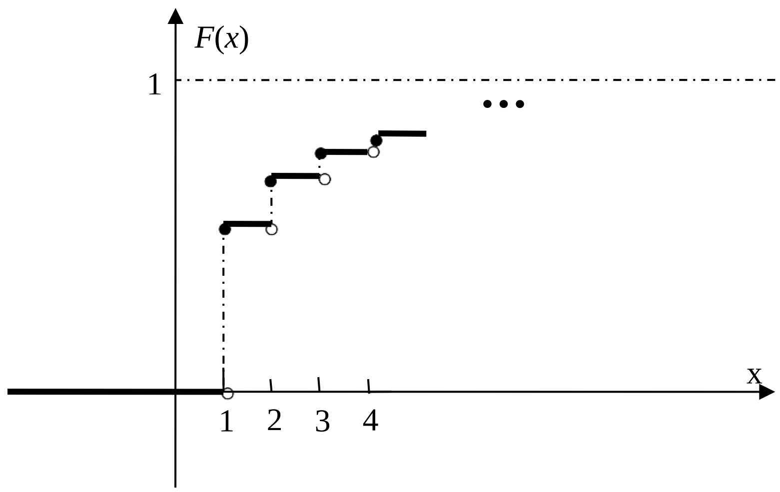
Grafiği "çan eğrisi" ismini de taşıyan bu olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

dır.

Örnek: Aşağıdaki fonksiyon da dağılım fonksiyonu özelliklerini taşımaktadır (azalmayan, sağdan sürekli, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$).

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{n+1} & , \quad n \le x < n+1 \ , \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$



Bu dağılım fonksiyonuna karşılık gelen P olasılık ölçüsünü göz önüne alalım.

$A \in B$, $A \subset (-\infty, 1)$ için $P(A) = 0$ dır.

$A = \{n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ için,

$$P(\{n\}) = F(n) - \lim_{h \to 0^+} F(n-h)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n(n+1)}$$

dır. Üstelik,

$$P(\mathbb{Z}^+) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

olup, bir birim olasılık pozitif tamsayılara karşılık gelen noktalara dağılmıştır.

Dağılım fonksiyonu basamak fonksiyonu biçiminde olan dağılımlarda bir birim olasılık bazı noktalara (sıçrama noktalarına) dağılmaktadır. Bu tür dağılımlara kesikli olasılık dağılımları denmektedir.

Dağılım fonksiyonunun sıçrama noktaları $x = 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere,

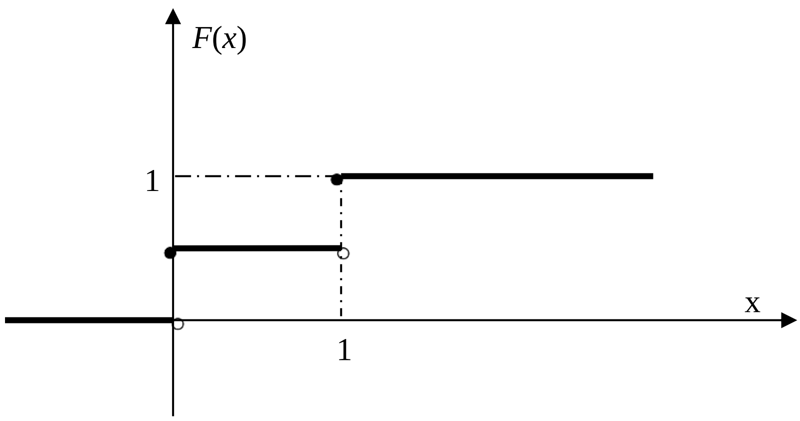
$$f(x) = F(x) - F(x^-) = \frac{1}{x(1+x)} \quad , \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

fonksiyonuna bu dağılımın olasılık fonksiyonu denir.

Bu derste göreceğimiz olasılık dağılımları ya sürekli, ya da kesikli olacaktır.

Örnek: Aşağıdaki fonksiyon dağılım fonksiyonu özelliklerini (azalmayan, sağdan sürekli, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$) taşımaktadır.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & , \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & , \quad x \ge 1 \end{cases}$$



Bu dağılım fonksiyonuna karşılık gelen olasılık ölçüsü P olsun.

$$P(\{0\}) = F(0) - F(0^-) = \frac{1}{2}$$

$$P(\{1\}) = F(1) - F(1^-) = \frac{1}{2}$$

ve $x \notin \{0,1\}$ için $P(\{x\}) = 0$ dır. Bir birim olasılık 0 ile 1 noktasındadır ve eşit miktardadır. $A \cap \{0,1\} = \varnothing$ için $P(A) = 0$ dır.