Kesikli Rasgele Değişkenler

Tanım (Ω, U, P) bir olasılık uzayı,

$$\begin{array}{rccc} X: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \longrightarrow & X(\omega) \end{array}$$

bir rasgele değişken ve X in aldığı değerlerin kümesi,

$$D_X = X(\Omega) = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ , } \exists \omega \in \Omega \text{ için } X(\omega) = x\}$$

olmak üzere, D_X kümesi sonlu veya sayılabilir sonsuz elemanlı olduğunda X e kesikli rasgele değişken (discrete random variable) denir.

Tanım X kesikli bir rasgele değişken olmak üzere,

$$f(x) = P(X = x) \quad , \quad x \in D_X$$

fonksiyonuna X in olasılık fonksiyonu denir.

Örnek Düzgün bir tavla zarı atılışında gelen nokta sayısı X rasgele değişkeni olmak üzere,

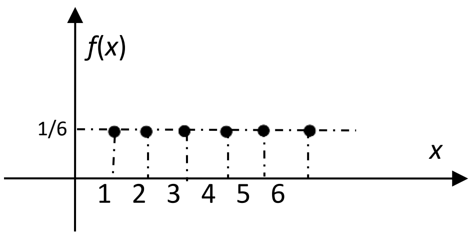
$$D_X = \ 1,2,3,4,5,6$$

olup, X kesikli bir rasgele değişkendir. X in olasılık fonksiyonu,

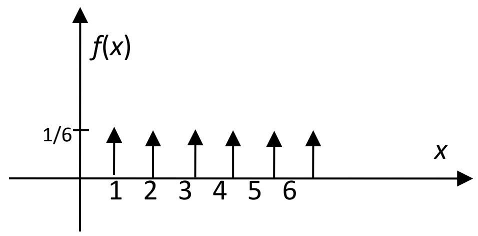
$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{6} \quad , \quad x \in D_X = \ 1,2,3,4,5,6$$

dır. f fonksiyonunun grafiği,

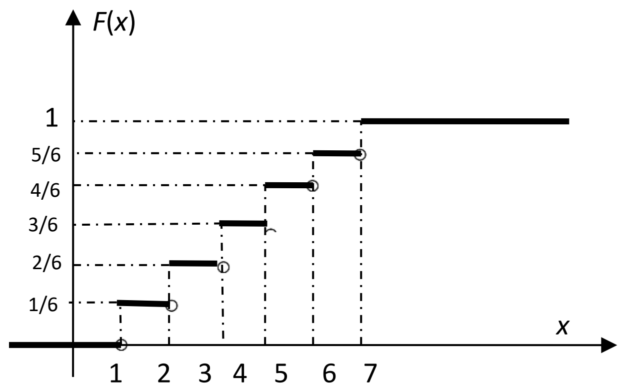
$$grafik(f) = \ (x, f(x)) : x = 1,2,3,4,5,6$$



olmak üzere, bu grafiği



biçiminde göstereceğiz. Okların yükseklikleri o noktalardaki olasılıkları göstermektedir. Dağılım fonksiyonunda ise basamakların yükseklikleri olasılıkları göstermektedir.



Kesikli bir X rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu F ve olasılık fonksiyonu f olmak üzere,

$$F:\mathbb{R}\rightarrow[0,1]$$

$$x\rightarrow F(x)=P(X\leq x)=\sum_{x_i\in D_X,\, x_i\leq x} f(x_i)$$

$$f(x)=P(X=x)=F(x)-F(x^-)\quad,\quad x\in D_X$$

$$\begin{cases} 1)\ f(x)\geq 0\ ,\ x\in D_X \\ 2)\ \sum\limits_{x\in D_X} f(x)=1 \end{cases}$$

dır.

Örnek $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\dots,\omega_8\}$, $U=P(\Omega)$ ve $P(A)=\dfrac{n(A)}{8}$ olmak üzere X fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$X:\Omega\to\mathbb{R}$$

$$\omega\to X(\omega)=\begin{cases}0 & , \quad \omega=\omega_1\\ 1 & , \quad \omega=\omega_2,\omega_3,\omega_4\\ 2 & , \quad \omega=\omega_5,\omega_6,\omega_7\\ 3 & , \quad \omega=\omega_8\end{cases}$$

X bir rasgele değişkendir.

$$\Omega=\{YYY,YYT,YTY,TYY,YTT,TYT,TTY,TTT\}$$

olduğunda, X rasgele değişkeni düzgün bir paranın üç kez atılışında gelen turaların sayısı olacaktır. Böyle tanımlanan X rasgele değişkeni için,

$$P(X=0)=P(\{YYY\})=1/8$$

$$P(X\le 1)=P(\{YYY,YYT,YTY,TYY\})=4/8$$

$$P(X=1)=P(\{YYT,YTY,TYY\})=3/8$$

$$P(X=3)=P(\{TTT\})=1/8$$

$$P(X=1/2)=P(\varnothing)=0$$

dır. X rasgele değişkenin aldığı değerlerin kümesi,

$$D_X=X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$$

olmak üzere, X kesikli bir rasgele değişkendir. X in olasılık fonksiyonu,

$$f(x)=P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{1}{8} & , \quad x=0\\ \dfrac{3}{8} & , \quad x=1\\ \dfrac{3}{8} & , \quad x=2\\ \dfrac{1}{8} & , \quad x=3\end{cases}$$

dır.

Alışagelmiş olarak, kesikli bir rasgele değişkenin aldığı değerler ile bu değerleri alması olasılıkları aşağıdaki gibi bir olasılık tablosunda gösterilmektedir.

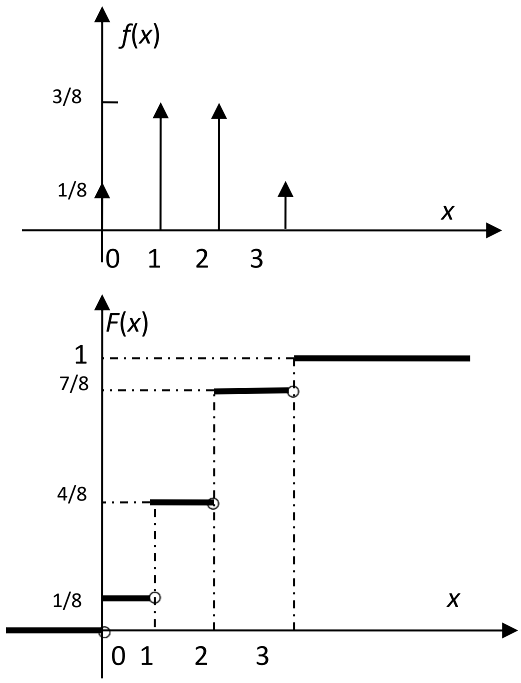
x	0	1	2	3
$f(x) = P(X = x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

X rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu,

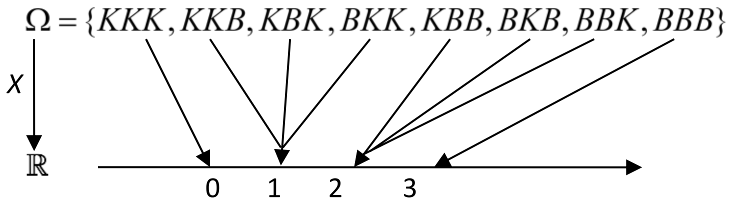
$$F : \mathbb{R} \to [0,1]$$

$$x \to F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{1}{8} & , \quad 0 \le x < 1 \\ \frac{4}{8} & , \quad 1 \le x < 2 \\ \frac{7}{8} & , \quad 2 \le x < 3 \\ 1 & , \quad x \ge 3 \end{cases}$$

dır.



Bir torbada eşit sayıda beyaz ve kırmızı top bulunsun. Çekileni yine torbaya atarak ardı ardına üç top çekilmesi ve renklerinin gözlenmesi deneyinin Örnek uzayı,



olmak üzere, X rasgele değişkeni gelen beyaz top sayısıdır. Bu rasgele değişkenin olasılık ve dağılım fonksiyonları yukarıdakilerdir.