Sürekli Rasgele Değişkenler

Tanım Bir X rasgele değişkenin $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ dağılım fonksiyonu,

1) $f(x)\geq 0$, $x\in\mathbb{R}$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

özelliklerine sahip bir f fonksiyonu yardımıyla,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \ , \ x\in\mathbb{R}$$

biçiminde yazılabiliyorsa, X rasgele değişkenine sürekli rasgele değişken (mutlak sürekli rasgele değişken) ve f fonksiyonuna X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu denir.

Sürekli bir X rasgele değişkeninin F dağılım fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca, $a<b$, $a,b\in\mathbb{R}$ için

$$P(\{a\})=F(a)-\lim_{h\to 0^+}F(a-h)=F(a)-F(a^-)=0$$

$$P((a,b])=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \ , \ x\in\mathbb{R}$$

ve F fonksiyonunun türevlenebildiği noktalarda,

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$$

dır.

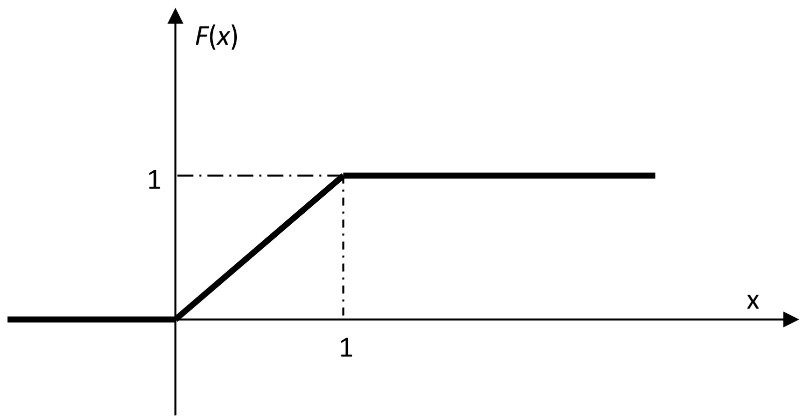
Örnek $\Omega=[0,1]$, $P(A)=$" A nın aralık uzunluğu" olmak üzere

$$
\begin{aligned}
X:\ \ \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}\\
\omega &\longrightarrow X(\omega)=\omega
\end{aligned}
$$

fonksiyonu bir rasgele değişkendir. X rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu,

$$
\begin{aligned}
F:\ \ \mathbb{R} &\rightarrow [0,1]\\
x &\rightarrow F(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0 \ , & x<0\\ x \ , & 0\le x<1\\ 1 \ , & x\ge 1\end{cases}
\end{aligned}
$$

ve grafiği,



olmak üzere,

$$P \;\; X=a \;\; =F \;\; a \;\; -F \;\; a^{-} \;\; =0 \ , \ \forall a\in\mathbb{R}$$

$$P(-\infty< X \le 1/2)=F(1/2)=1/2$$

$$P(1/3< X \le 1/2])=F(1/2)-F(1/3)=1/2-1/3=1/6$$

$$P(1/3\le X \le 1/2])=F(1/2)-F(1/3)=1/2-1/3=1/6$$

$$P((1/3,\infty))=1-F(1/3)=1-1/3=2/3$$

dır.

X rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases}1 \ , & 0<x<1\\ 0 \ , & \textit{diğer yerlerde}\end{cases}$$

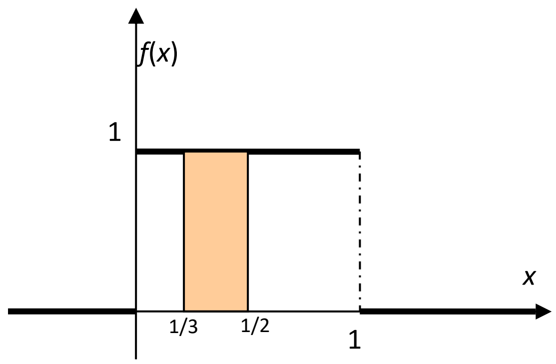
fonksiyonu yardımıyla,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \;,\; x\in\mathbb{R}$$

biçiminde yazılabilir. X sürekli bir rasgele değişkendir. X in olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases}1 \;, & 0<x<1 \\ 0 \;, & \textit{diğer yerlerde}\end{cases}$$

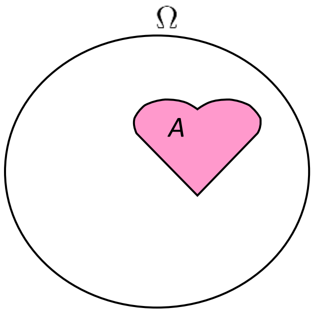
ve grafiği,



olmak üzere, $P(1/3 < X \leq 1/2]) = \int_{1/3}^{1/2} f(x)dx = \int_{1/3}^{1/2} 1dx = 1/2-1/3 = 1/6$ dır.

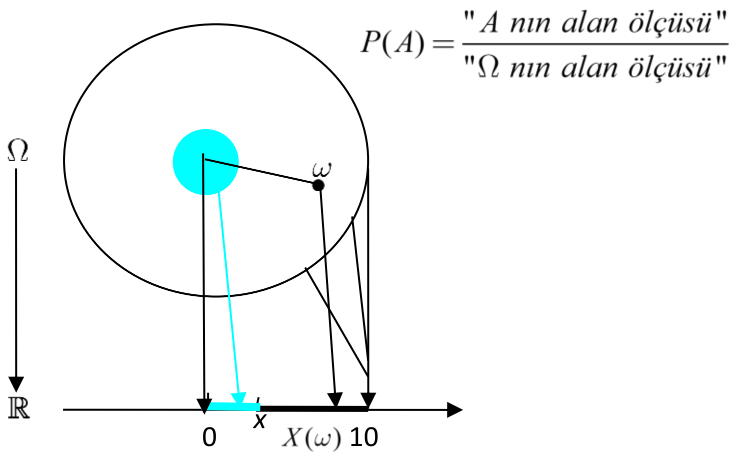
Yeniden hatırlatalım. Olasılık yoğunluk fonksiyonlarında olasılık hesabı, hız-zaman grafiğinde yol hesabına benzemektedir. Hız-zaman grafiğinde belli bir zaman aralığında alınan yol miktarı bir alana karşılık geldiği gibi, olasılık yoğunluk fonksiyonunda da bir aralığın olasılığı bir alana karşılık gelmektedir. Yalnız, olasılık yoğunluk fonksiyonları hiçbir zaman negatif değer almamaktadır. Dağılım fonksiyonunda olasılık hesabı, yol-zaman grafiğinde yol miktarının hesabına benzemektedir.

<u>Örnek</u> Çok küçük bir boncuk yarıçapı 10 cm olan bir dairenin içindeki her hangi bir noktaya düşecek şekilde rasgele atılsın. Böyle bir deney için, Örnek Uzay ve uygun bir Olasılık Ölçüsü aşağıdaki gibi olabilir.



$$P(A)=\frac{\text{"}A\ nın\ alan\ ölçüsü\text{"}}{\text{"}\Omega\ nın\ alan\ ölçüsü\text{"}}$$

X rasgele değişkeni, deney sonucunda boncuğun düştüğü nokta ile dairenin merkezi arasındaki uzaklık olsun.



X rasgele değişkenin aldığı değerlerin kümesi,

$$X(\Omega)=\ X(\omega):\omega\in\Omega\ =\ 0,10\ \subset\mathbb{R}$$

olmak üzere, X kesikli bir rasgele değişken değildir. X in dağılım fonksiyonu,

$$F: \mathbb{R} \to [0,1]$$

$$x \to F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2}{100} & , \quad 0 \le x < 10 \\ 1 & , \quad x \ge 10 \end{cases}$$

olmak üzere, bu dağılım fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{50} \ , & 0 < x < 10 \\ 0 \ , & \textit{diğer yerlerde} \end{cases}$$

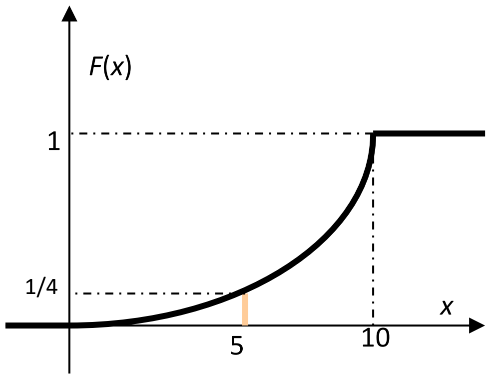
fonksiyonu yardımıyla,

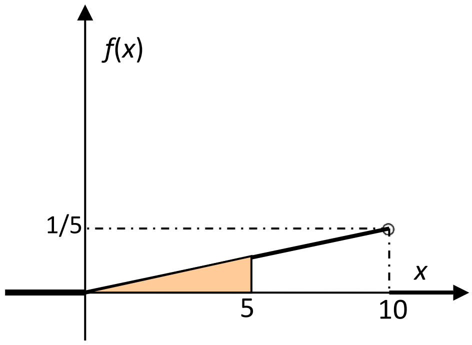
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \ , \ x \in \mathbb{R}$$

biçiminde yazılabilir. X sürekli bir rasgele değişkendir. X in dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2}{100} & , \quad 0 \le x < 10 \\ 1 & , \quad x \ge 10 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{50} \ , & 0 < x < 10 \\ 0 \ , & \textit{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olmak üzere, grafikleri





dır.

$$P(X \le 5) = F(5) = \frac{5^2}{100} = \frac{1}{4} \qquad P(X \le 5) = \int_{-\infty}^{5} f(x)dx = \int_{0}^{5} \frac{x}{50}dx = \left.\frac{x^2}{100}\right|_{x=0}^{5} = \frac{5^2}{100} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 5) = F(5) - F(5^-) = \frac{5^2}{100} - \frac{5^2}{100} = 0$$

$$P(3 < X \le 5) = F(5) - F(3) = \frac{5^2}{100} - \frac{3^2}{100} = \frac{16}{100}$$

$$P(3 < X \le 5) = \int_{3}^{5} f(x)dx = \int_{3}^{5} \frac{x}{50}dx = \left.\frac{x^2}{100}\right|_{x=3}^{5} = \frac{5^2}{100} - \frac{3^2}{100} = \frac{16}{100}$$

Örnek X rasgele değişkeni belli bir tür elektronik parça için yıl olarak dayanma süresi olsun. X in olasılık yoğunluk fonksiyonunun,

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x/5} \ , & x \ge 0 \\ 0 \ , & diğer \ \ yerlerde \end{cases}$$

biçiminde olduğu bilinsin. Olasılık yoğunluk fonksiyonu için

1) $f(x) \ge 0 \ , \ x \in \mathbb{R}$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

özellikleri sağlanması gerektiğinden, c>0 ve

$$\int_{0}^{\infty} ce^{-x/5}dx = 1$$

$$c\int_{0}^{\infty} e^{-x/5}dx = 1$$

$$c\frac{e^{-x/5}}{-1/5}\Bigg|_{x=0}^{\infty}=1$$

$$c(0-\frac{1}{-1/5})=1$$

$$c=\frac{1}{5}$$

olmalıdır. Buna göre X in olasılık yoğunluk fonksiyonu,

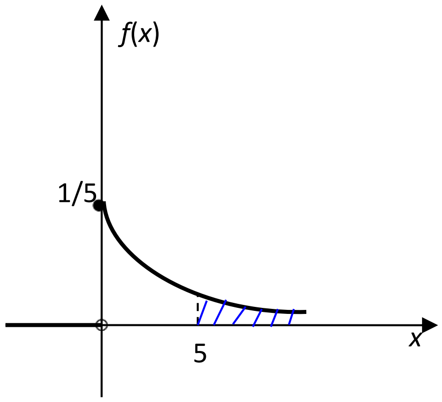
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-x/5} & ,\ x\geq 0\\ 0 & ,\ diğer\ \ yerlerde\end{cases}$$

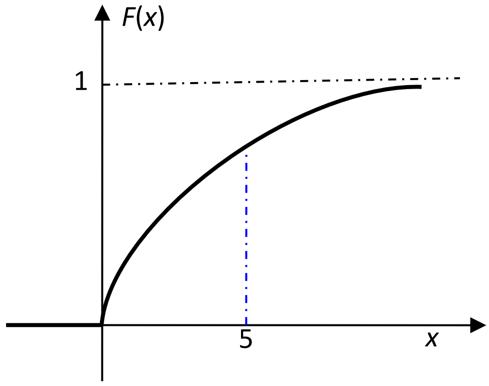
ve dağılım fonksiyonu,

$$F:\mathbb{R}\rightarrow[0,1]$$

$$x\rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{5}e^{-x/5}dx=\begin{cases}0 & ,\ x<0\\ \int_{0}^{x}\frac{1}{5}e^{-x/5}dx=\frac{\frac{1}{5}e^{-x/5}}{-1/5}\Bigg|_{0}^{x} & ,\ x\geq 0\end{cases}=\begin{cases}0 & ,\ x<0\\ 1-e^{-x/5} & ,\ x\geq 0\end{cases}$$

dır. Olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonunun grafikleri aşağıdadır.





Böyle bir elektronik parçanın an az 5 yıl dayanması olasılığı,

$$P(X \geq 5) = \int_5^\infty \frac{1}{5} e^{-x/5} dx = -e^{-x/5}\Big|_5^\infty = e^{-1} \approx 0,37$$

dır. 10 yıl dayandığı bilindiğinde bundan sonra en az 5 yıl daha dayanması olasılığı nedir?

$$P(X \geq 15 / X \geq 10) = \frac{P(X \geq 15 \; ve \; X \geq 10)}{P(X \geq 10)} = \frac{P(X \geq 15)}{P(X \geq 10)} = \frac{\int_{15}^\infty \frac{1}{5} e^{-x/5} dx}{10} = \frac{-e^{-x/5}\Big|_{15}^\infty}{-e^{-x/5}\Big|_{10}^\infty} = \frac{e^{-3}}{e^{-2}} = e^{-1}$$

yani,

$$P\ (X \geq 10+5)/(X \geq 10)\ = P(X \geq 5)$$

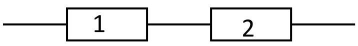
olmak üzere, parçanın 10 yıl dayandığı bilindiğinde bundan sonra en az 5 yıl daha dayanması olasılığı, yeni göreve başlamış bir parçanın en az 5 yıl dayanması olasılığına eşittir. Genel olarak,

$$P\ (X \geq a+x)/(X \geq a)\ = P(X \geq x)$$

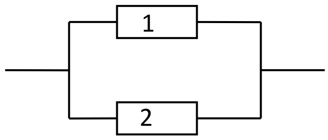
olmak üzere, a yıl dayanmış bir parçanın bundan sonra en az x yıl daha dayanması olasılığı, yeni göreve başlamış bir parçanın en az x yıl dayanması olasılığı kadardır. Belli bir anda görevde olan parçaların yeni göreve başlayanlar ile rekabet edebilir olmaları bunlar için yıpranma olmadığı anlamına, yani bu parçaların yaşlanmadığı anlamına gelebilir. Birçok elektronik parça bu özelliğe sahiptir. Bunların bozulmalarının sebebi yıpranma değil başka etkenlerdir.

Dayanma süreleri birbirinden bağımsız olan böyle parçalardan oluşmuş aşağıdaki devre elemanlarının en az 5 yıl dayanmaları olasılıkları nedir?

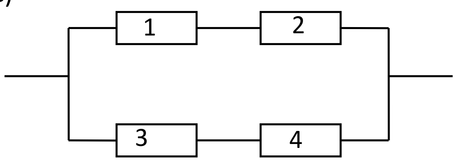
a)



b)



c)



$A_i \ (i=1,2,3,4)$ olayı i numaralı parçanın en az 5 yıl dayanması olayı olsun.

a)Seri bağlanmış parçalardan oluşan devre elemanının en az 5 yıl dayanması olayı,

$$A = A_1 \cap A_2$$

olmak üzere A_1, A_2 nin bağımsızlığı altında,

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = e^{-1}e^{-1} = e^{-2}$$

dır.

b) Paralel bağlanmış parçalardan oluşan devre elemanının en az 5 yıl dayanması olayı,

$$A = A_1 \cup A_2$$

olmak üzere A_1, A_2 nin bağımsızlığı altında,

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2)$$

$$= e^{-1} + e^{-1} - e^{-1}e^{-1}$$

$$= 2e^{-1} - e^{-2}$$

dır.

c) Dört parçadan oluşan devre elemanının en az 5 yıl dayanması olayı,

$$A = (A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4)$$

olmak üzere A_1, A_2, A_3, A_4 olaylarının bağımsızlığı altında,

$$P(A) = P\;\;(A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4)\;\; = P(A_1 \cap A_2) + P(A_3 \cap A_4) - P\;\;(A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_2)$$
$$= e^{-2} + e^{-2} - e^{-4} = 2e^{-2} - e^{-4}$$

dır.