BEKLENEN DEĞER ve VARYANS

Tanım X bir rasgele değişken ve $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere,

i) X kesikli ve $\sum_{x\in D_X}|g(x)|f(x)<\infty$ olduğunda,

$$E(g(X))=\sum_{x\in D_X}g(x)f(x)$$

ii) X sürekli ve $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|f(x)dx<\infty$ olduğunda,

$$E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)dx$$

sayısına $g(X)$ in beklenen değeri denir.

Tanım X bir rasgele değişken, $c\in\mathbb{R}$ ve k bir doğal sayı olmak üzere:

a) $E\left[(X-c)^k\right]$ değerine X 'in c ye göre k 'inci momenti,

b) $E\left(X^k\right)$ değerine X 'in k 'inci momenti,

c) $E(X)$ değerine X 'in beklenen değeri,

d) $E\left[(X-EX)^2\right]$ değerine X 'in varyansı,

e) $E\left[X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)\right]$ değerine X 'in k 'inci çarpımsal momenti denir.

Alışagelmiş olarak bir X rasgele değişkenin beklenen değeri μ_X veya sadece μ, varyansı ise $Var(X)$, σ_X^2 veya sadece σ^2 ile de gösterilmektedir. Varyansın kareköküne standart sapma denir ve bir X rasgele değişkenin standart sapması σ_X veya sadece σ ile gösterilmektedir.

Örnek X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases}3x^{-4} & , \quad x>1\\ \\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

olsun.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,f(x)dx=\int_{1}^{\infty}x3x^{-4}dx=\left.\frac{3x^{-2}}{-2}\right|_1^{\infty}=\frac{3}{2}<\infty$$

olduğundan, X in beklenen değeri vardır ve

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{1}^{\infty}x3x^{-4}dx=\left.\frac{3x^{-2}}{-2}\right|_1^{\infty}=\frac{3}{2}$$

dır. $\alpha \geq 3$ için $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\alpha} 3x^{-4} dx$ integrali ıraksak olduğundan X rasgele değişkenin 3 ve 3 den büyük olan momentleri yoktur.

<u>Teorem</u> $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$a)\ \ E\left(aX+b\right)=aE\left(X\right)+b$$

$$b)\ \ Var\left(aX+b\right)=a^2 Var\left(X\right)$$

$$c)\ \ Var\left(X\right)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2$$

İspat: a) Kesikli halde,

$$E(a+bX)=\sum_{x}(a+bx)f(x)=a\underbrace{\sum_{x} f(x)}_{1}+b\underbrace{\sum_{x} xf(x)}_{E(X)}=a+bE(X)$$

sürekli halde,

$$E(a+bX)=\int_{-\infty}^{\infty}(a+bx)f(x)dx=a\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx}_{1}+b\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx}_{E(X)}=a+bE(X)$$

dır.

b)
$$Var(aX+b)=E\ \ aX+b-E(aX+b)\ \ ^2=E\ \ aX+b-aE(X)-b\ \ ^2$$
$$=E\ \ aX-aE(X)\ \ ^2=a^2E\ \ X-E(X)\ \ ^2=a^2Var(X)$$

c)
$$Var\left(X\right)=E\left(X-E(X)\right)^2=E\left(X^2-2XE(X)+\left(E(X)\right)^2\right)=E\left(X^2\right)-2E(X)E(X)+\left(E(X)\right)^2$$
$$=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2$$

<u>Örnek</u> X rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu

$$f\left(x\right)=\frac{1}{6}\ \ ,\ \ \ x=-2,-1,0,1,2,3$$

olsun.

$$E\left(X\right)=\sum_{x=-2}^{3} xf\left(x\right)=(-2)\times\frac{1}{6}+(-1)\times\frac{1}{6}+0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

$$E\left(X^2\right)=\sum_{x=-2}^{3} x^2 f\left(x\right)=(-2)^2\times\frac{1}{6}+(-1)^2\times\frac{1}{6}+0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}=\frac{19}{6}$$

$$E\left(X^3\right)=\sum_{x=-2}^{3} x^3 f\left(x\right)=(-2)^3\times\frac{1}{6}+(-1)^3\times\frac{1}{6}+0^3\times\frac{1}{6}+1^3\times\frac{1}{6}+2^3\times\frac{1}{6}+3^3\times\frac{1}{6}=\frac{27}{6}$$

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{19}{6}-(\frac{1}{2})^2=\frac{35}{12}$$

dır.

Örnek X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases}3x^{-4} & , \quad x>1\\ \\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

olsun.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|\, f(x)dx=\int_{1}^{\infty}x3x^{-4}dx=\left.\frac{3x^{-2}}{-2}\right|_{1}^{\infty}=\frac{3}{2}<\infty$$

olduğundan, X in beklenen değeri vardır ve

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{1}^{\infty}x3x^{-4}dx=\left.\frac{3x^{-2}}{-2}\right|_{1}^{\infty}=\frac{3}{2}$$

dır. $\alpha\geq 3$ için $\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{\alpha}\, 3x^{-4}dx$ integrali ıraksak olduğundan X rasgele değişkenin 3 ve 3 den büyük olan momentleri yoktur.

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx=\int_{1}^{\infty}x^2 3x^{-4}dx=\left.\frac{3x^{-1}}{-1}\right|_{1}^{\infty}=3$$

olmak üzere, X rasgele değişkenin varyansı,

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=3^2-(\frac{3}{2})^2=\frac{25}{36}$$

dır. Bir rasgele değişkenin varyansının var olması için ikinci momentinin var olması yeterlidir.

Örnek X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases}2x^{-3} & , \quad x>1\\ \\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

olduğunda X in birinci momenti (beklenen değeri) var ve

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{1}^{\infty}x2x^{-3}dx=\left.\frac{2x^{-1}}{-1}\right|_{1}^{\infty}=2$$

olup, ikinci momenti, dolayısı ile varyansı yoktur.

Örnek X rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu,

$$f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \quad x=0,1,2,\ldots \quad (\lambda>0)$$

olsun. $\sum_{x=0}^{\infty}|x|\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}<\infty$ olduğundan X in bütün momentleri vardır.

X in beklenen değeri,

$$E(X)=\sum_{x=0}^{\infty} x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=\sum_{x=1}^{\infty} x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}=\lambda$$

dır. $X^2=X\left(X-1\right)+X$ ifadesinden faydalanarak,

$$E\left(X^2\right)=E\left[X\left(X-1\right)\right]+E\left(X\right)$$

$$=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{x\left(x-1\right)e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}+\lambda$$

$$=\sum_{x=2}^{\infty}\frac{x\left(x-1\right)e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}+\lambda$$

$$=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{\left(x-2\right)!}+\lambda$$

$$=\lambda^2+\lambda$$

elde edilir. Buradan,

$$Var\left(X\right)=E\left(X^2\right)-\left(EX\right)^2=\lambda$$

bulunur.

<u>Örnek</u> X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-x/5} & , \quad x>0\\ \\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

olsun.

$$E\left(X\right)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^{\infty}\underset{u}{x}\underbrace{\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx}_{dv}=uv\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}vdu$$

$$=-xe^{-\frac{x}{5}}\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}(-e^{-\frac{x}{5}})dx=\int_0^{\infty}e^{-\frac{x}{5}}dx=\left.\frac{e^{-\frac{x}{5}}}{-\frac{1}{5}}\right|_0^{\infty}=5$$

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x\ \ f(x)dx=\int_0^{\infty}\underset{u}{x^2}\underbrace{\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx}_{dv}=uv\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}vdu$$

$$=-x^2e^{-\frac{x}{5}}\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}(-e^{-\frac{x}{5}})2xdx=2\int_0^{\infty}e^{-\frac{x}{5}}xdx=10\int_0^{\infty}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}xdx=50$$

ve

$$Var(X) = E(X^2) - (EX)^2 = 50 - 5^2 = 25$$

elde edilir.

<u>Örnek</u> Bir günde 5 parça işleyen bir torna makinası için kusursuz olarak işlediği parçaların sayısı X olsun. X in olasılık fonksiyonunun

$$f(x) = \binom{5}{x}\left(\frac{4}{5}\right)^x \left(\frac{1}{5}\right)^{5-x}, \quad x = 0,1,2,3,4,5$$

x	0	1	2	3	4	5
$f(x) = \binom{5}{x}\left(\frac{4}{5}\right)^x \left(\frac{1}{5}\right)^{5-x}$	$\frac{1}{3125}$	$\frac{20}{3125}$	$\frac{160}{3125}$	$\frac{640}{3125}$	$\frac{1280}{3125}$	$\frac{1024}{3125}$

olduğu bilinsin.

$$E(X) = \sum_{x=0}^{5} x f(x) = 0 \times \frac{1}{3125} + 1 \times \frac{20}{3125} + 2 \times \frac{160}{3125} + 3 \times \frac{640}{3125} + 4 \times \frac{1280}{3125} + 5 \times \frac{1024}{3125} = 4$$

$$Var(X) = E\ (X-4)^2 = \sum_{x=0}^{5} (x-4)^2 f(x)$$

$$= (0-4)^2 \times \frac{1}{3125} + (1-4)^2 \times \frac{20}{3125} + (2-4)^2 \times \frac{160}{3125} + (3-4)^2 \times \frac{640}{3125} + (4-4)^2 \times \frac{1280}{3125} + (5-4)^2 \times \frac{1024}{3125} = \frac{4}{5} = 0.8$$

İşlenmemiş parçanın alış değeri a, işleme masrafı b, kusurlu işlenmiş parçanın hurda değeri c ve kusursuz işlenmiş parçanın satış değeri d olmak üzere günlük kazancın beklenen değeri nedir?

K rasgele değişkeni günlük kazancı göstermek üzere,

$$K = -5(a+b) + (5-X)c + Xd = 5(c-a-b) + (d-c)X$$

olarak ifade edilebilir.

$$E(K) = E\big(5(c-a-b) + (d-c)X\big) = 5(c-a-b) + (d-c)E(X)$$

$$Var(X) = Var\big(5(c-a-b) + (d-c)X\big) = (d-c)^2 Var(X)$$

olmak üzere, örneğin işlenmemiş parçanın alış değeri a=100 TL, işleme masrafı b=100 TL, kusurlu işlenmiş parçanın hurda değeri c=10 TL ve kusursuz işlenmiş parçanın satış değeri d=310 TL olduğunda,

$$K = 5(c-a-b) + (d-c)X = -950 + 300X$$

$$E(K) = -950 + 300E(X) = -950 + 300 \times 4 = 250$$

$$Var(X) = 300^2 Var(X) = 300^2 \times \frac{4}{5} = 72000$$

$$\sigma_X = \sqrt{72000} = 268.3$$

Günlük kazancın beklenen değeri, başka bir ifade ile ortalama günlük kazanç 250 TL dir. Günlük kazancın olasılık dağılımı,

x	0	1	2	3	4	5

$P(X=x)$	$\frac{1}{3125}$	$\frac{20}{3125}$	$\frac{160}{3125}$	$\frac{640}{3125}$	$\frac{1280}{3125}$	$\frac{1024}{3125}$
$k=-950+300x$	-950	-650	-350	-50	250	550
$P(K=k)$	$\frac{1}{3125}$	$\frac{20}{3125}$	$\frac{160}{3125}$	$\frac{640}{3125}$	$\frac{1280}{3125}$	$\frac{1024}{3125}$

olmak üzere, bazı günlerde 550 TL kazanç olduğu gibi, 950, 650 ya da 350 TL kayıp söz konusu olabilir.