Tanım X bir rasgele değişken olmak üzere (var olması halinde),

$$M_X(t) = E(e^{tX}) \quad , \quad -h < t < h \quad (h > 0)$$

fonksiyonuna X in moment üreten fonksiyonu denir.

Örnek X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olsun.

$$\int_0^\infty \left| e^{tx} \right| e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{(t-1)x} dx$$

integrali $t < 1$ için yakınsak olduğundan, X in moment üreten (moment çıkaran) fonksiyonu vardır ve

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{(t-1)x} dx$$

$$= \left. \frac{e^{(t-1)x}}{t-1} \right|_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{1-t} = (1-t)^{-1} \quad , \quad t < 1$$

dır.

Örnek X rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,\ldots \qquad (\lambda > 0)$$

olsun. $\forall \ t \in R$ için

$$\sum_{x=0}^{\infty} \left| e^{tx} \right| \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

serisi yakınsak olduğundan, X in moment üreten (moment çıkaran) fonksiyonu vardır ve

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} (e^t \lambda)^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{e^t \lambda}$$

$$= e^{\lambda(e^t - 1)} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

dır. Bir X rasgele değişkenin moment üreten fonksiyonu,

$$M_X(t) = e^{(e^t - 1)} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx}}{x!}$$

ise X in olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \frac{e^{-1}}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,\ldots$$

dır.

Teorem Bir X rasgele değişkenin moment üreten fonksiyonu varsa,

$$\left.\frac{d^n}{dt^n}M_X(t)\right|_{t=0} = E(X^n) \quad , \quad n=1,2\ldots$$

dır.

İspat: E ile t ye göre türev alma işlemlerinin yer değiştirebileceği varsayımı altında,

$$\frac{d}{dt}M_X(t)=\frac{d}{dt}E(e^{tX})=E\left(\frac{d}{dt}e^{tX}\right)=E\left(Xe^{tX}\right)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)=\frac{d^2}{dt^2}E(e^{tX})=E\left(\frac{d^2}{dt^2}e^{tX}\right)=E\left(X^2e^{tX}\right)$$

$$\frac{d^3}{dt^3}M_X(t)=\frac{d^3}{dt^3}E(e^{tX})=E\left(\frac{d^3}{dt^3}e^{tX}\right)=E\left(X^3e^{tX}\right)$$

ve genel olarak,

$$\frac{d^k}{dt^k}M_X(t)=\frac{d^k}{dt^k}E(e^{tX})=E\left(\frac{d^k}{dt^k}e^{tX}\right)=E\left(X^ke^{tX}\right) \quad , \quad k=1,2,3,\ldots$$

olmak üzere,

$$\left.\frac{d^k}{dt^k}M_X(t)\right|_{t=0}=\left.E\left(X^ke^{tX}\right)\right|_{t=0}=E(X^k) \quad , \quad k=1,2,3,\ldots$$

dır.

Örnek $M_X(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$, $t\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$E(X)=\frac{dM_X(t)}{dt}\Big|_{t=0}=\lambda e^t e^{\lambda(t-1)}\Big|_{t=0}=\lambda$$

$$E(X^2)=\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\Big|_{t=0}$$

$$=[\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}+(\lambda e^t)^2e^{\lambda(e^t-1)}]\Big|_{t=0}$$

$$=\lambda+\lambda^2$$

elde edilir.

Not: Bir rasgele değişkenin beklenen değeri (ortalaması) dağılımın merkezi, varyansı ya da standart sapması beklenen değer etrafında yayılımın büyüklüğü hakkında fikir vermektedir.