Rasgele Değişkenlerin Dönüşümleri

<u>Örnek</u> X rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu,

$$f(x)=\frac{1}{5} \quad , \quad x\in\{-2,-1,0,1,2\}$$

olsun. $Y=X^2$ rasgele değişkenin olasılık fonksiyonunu bulalım.

X rasgele değişkenin olasılık tablosu,

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)=P(X=x)$	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

dır. $Y=X^2$ rasgele değişkenin aldığı değerler, yani Y rasgele değişkenin değer kümesi $D_Y=\{0,1,4\}$ olmak üzere, olasılık fonksiyonu,

y	0	1	4
$g(y)=P(Y=y)$	2/5	1/5	2/5

dır.

<u>Örnek</u> X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

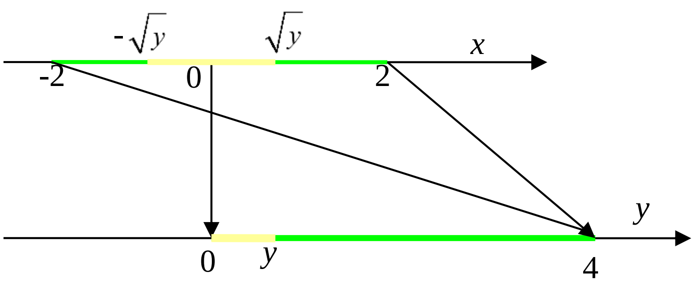
$$f_X(x)=\begin{cases} 1/4 & , \quad -2\le x\le 2 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olsun. X rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu,

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x<-2 \\ \dfrac{x+2}{4} & , \quad -2\le x<2 \\ 1 & , \quad x\ge 2 \end{cases}$$

dır. $Y=X^2$ rasgele değişkenin dağılımını (dağılım fonksiyonunu veya olasılık yoğunluk fonksiyonunu) bulalım.

$$D_X=\{x:-2\le x\le 2\}$$
$$D_Y=\{y:0\le y\le 4\}$$



olmak üzere, Y nin dağılım fonksiyonu,

$$F_Y:\mathbb{R}\to[0,1]$$
$$y\to F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$$

$$
= \begin{cases} 0 & , \quad y<0 \\ P\left(X^2 \le y\right) & , \quad 0 \le y < 4 \\ 1 & , \quad y \ge 4 \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} 0 & , \quad y<0 \\ P\left(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\right) & , \quad 0 \le y < 4 \\ 1 & , \quad y \ge 4 \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} 0 & , \quad y<0 \\ F_X(\sqrt{y}) - F_X\left(-\sqrt{y}\right) & , \quad 0 \le y < 4 \\ 1 & , \quad y \ge 4 \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} 0 & , \quad y<0 \\ \dfrac{1+\sqrt{y}}{4} - \dfrac{1-\sqrt{y}}{4} & , \quad 0 \le y < 4 \\ 1 & , \quad y \ge 4 \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} 0 & , \quad y<0 \\ \dfrac{\sqrt{y}}{2} & , \quad 0 \le y < 4 \\ 1 & , \quad y \ge 4 \end{cases}
$$

dır. Y rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$
f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{y}} & , 0 < y < 4 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}
$$

dır.

Örnek X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$
f_X(x) = \begin{cases} 1/5 & , \quad 0 \le x \le 5 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}
$$

olsun. $Y = X$ rasgele değişkenin dağılımını bulalım.

$$D_X = x : 0 \le x \le 5$$

ve

$$D_Y = 0,1,2,3,4,5$$

olmak üzere, Y kesikli bir rasgele değişkendir. Ayrıca,

$$P(Y=0)=P(0\leq X<1)=\frac{1}{5}$$
$$P(Y=1)=P(1\leq X<2)=\frac{1}{5}$$
$$P(Y=2)=P(2\leq X<3)=\frac{1}{5}$$
$$P(Y=3)=P(3\leq X<4)=\frac{1}{5}$$
$$P(Y=4)=P(4\leq X<5)=\frac{1}{5}$$
$$P(Y=5)=P(5\leq X<6)=P(X=5)=0$$

dır. Buna göre, Y rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$f_Y(y)=P(Y=y)=\frac{1}{5} \quad , \quad y=0,1,2,3,4$$

dır.

Görüldüğü gibi, sürekli bir rasgele değişkenin dönüşümü (fonksiyonu) olan rasgele değişkenler sürekli olabildiği gibi bazen kesikli olabilmektedir. Kesikli bir rasgele değişkenin dönüşümü hiçbir zaman sürekli rasgele değişken vermemektedir. Kesikli bir rasgele değişkenin dönüşümü yine kesikli bir rasgele değişkendir.

Örnek X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_X(x)=\begin{cases} 1 & , \quad 0<x<1 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olsun. $Y= \; 6X \; +1$ rasgele değişkenin dağılımını bulalım.

$$D_X = \; x:0<x<6$$

ve

$$D_Y = \; 1,2,3,4,5,6$$

olmak üzere, Y kesikli bir rasgele değişkendir. Ayrıca,

$$P(Y=1)=P(0<X<1/6)=\frac{1}{6}$$
$$P(Y=2)=P(1/6\leq X<2/6)=\frac{1}{6}$$
$$P(Y=3)=P(2/6\leq X<3/6)=\frac{1}{6}$$
$$P(Y=4)=P(3/6\leq X<4/6)=\frac{1}{6}$$

$$P(Y=5)=P(4/6\leq X<5/6)=\frac{1}{6}$$
$$P(Y=6)=P(5/6\leq X<1)=\frac{1}{6}$$

dır. Buna göre, Y rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$f_Y(y)=P(Y=y)=\frac{1}{6} \quad , \quad y=1,2,3,4,5,6$$

dır.

Örnek Şimdi ilginç olan dönüşümlerden birini ele alalım. Sürekli X rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu F olmak üzere $U=F(X)$ rasgele değişkeninin olasılık dağılımı nedir? Bu dönüşüme olasılık integral dönüşümü denir.

$$F_U(y)=P(U\leq u)=P\big(F(X)\leq u\big)$$

$$=\begin{cases} 0 & , \quad u<0 \\ P\big(F(X)\leq u\big) & , \quad 0\leq u<1 \\ 1 & , \quad u\geq 1 \end{cases}$$

$u\in(0,1)$ olmak üzere $x_0\in\mathbb{R}$ için $F(x_0)=u$ olsun. Bu durumda,

$$P(X\leq x_0)=P\big(F(X)\leq u\big)=F(x_0)=u$$

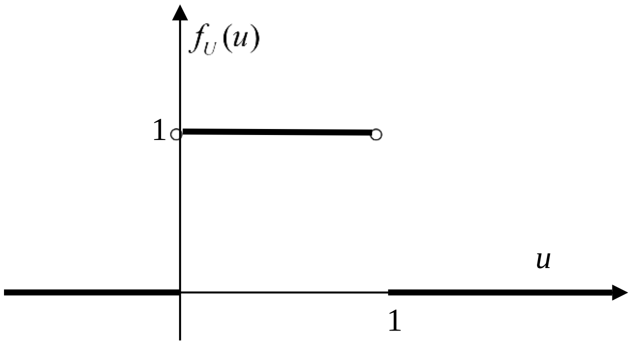
olacağından,

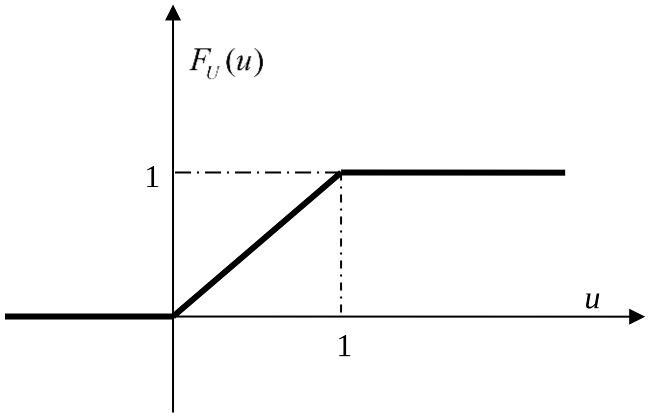
$$F_U(u)=\begin{cases} 0 & , \quad y<0 \\ u & , \quad 0\leq u<1 \\ 0 & , \quad u\geq 1 \end{cases}$$

ve

$$f_U(u)=\begin{cases} 1 & , \quad 0<u<1 \\ 0 & , \quad \text{d.y.} \end{cases}$$

elde edilir. Bu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu'nun grafikleri,





dır. QBASIC programlama dilinde RND fonksiyonu U rasgele değişkenin dağılımından sayı üretmektedir. Sürekli bir X rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu değer kümesi üzerinde birebir olduğunda, X in dağılımından sayı üretmede $F^{-1}(U)$, yani $F^{-1}(RND)$ değerleri alınabilir.