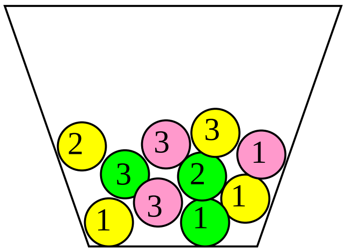
Rasgele Vektörler

Bir kavanozda, üzerlerinde 1,2,3 sayıları yazılı sarı, pembe ve yeşil toplar bulunsun.



Bir top çekilmesi ve renk ile birlikte üzerindeki sayının gözlenmesi deneyinde örnek uzay,

$$\Omega = \{1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 3\}$$

ve olasılık uzayı,

$$\begin{array}{c} \quad 2/10 \quad 1/10 \quad 1/10 \quad 1/10 \quad 1/10 \quad 1/10 \quad 1/10 \quad 2/10 \\ \Omega = \{1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 3\} \end{array} \quad , U = 2^{\Omega}$$

olmak üzere,

$$\begin{array}{c} \quad 2/10 \quad 1/10 \quad 1/10 \quad 1/10 \quad 1/10 \quad 1/10 \quad 1/10 \quad 2/10 \\ \Omega = \{1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 3\} \end{array} \quad , U = 2^{\Omega}$$

$$(X_1, X_2) \downarrow$$

$$\mathbb{R}^2 \quad (1,0), (2,0), (3,0), (1,1), (2,1), (3,1), (1,2), (3,2) \in \mathbb{R}^2$$

vektör değerli fonksiyonda, birinci bileşen $X_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ çekilen topun üzerindeki sayıyı, ikinci bileşen $X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ ise sarı top için 0, yeşil top için 1, pembe top için 2 değerini almaktadır.

$$(X_1, X_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$$

$$\omega \to (X_1, X_2)(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega))$$

fonksiyonu, tanımı aşağıda verilecek olan bir rasgele vektördür. Bu rasgele vektörün aldığı değerlerin kümesi,

$$D_{(X_1,X_2)} = (1,0),(2,0),(3,0),(1,1),(2,1),(3,1),(1,2),(3,2)$$

olup, buna kesikli rasgele vektör diyeceğiz. Bu rasgele vektörün olasılık fonksiyonu,

$$f(x_1,x_2) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \begin{cases} \dfrac{2}{10} & , \quad (x_1,x_2) = (1,0),(3,2) \\[2ex] \dfrac{1}{10} & , \quad (x_1,x_2) = (2,0),(3,0),(1,1),(2,1),(3,1),(1,2) \end{cases}$$

dır. Olasılık fonksiyonunun değerleri için olasılık tablosu aşağıdaki gibi hazırlanmaktadır. Solda ve üstte X_1 ile X_2 'nin aldığı değerler ve tablonun içinde

$f(x_1,x_2)=P(X_1=x_1,X_2=x_2)$ olasılıkları yer almaktadır. Alt satırda, satırlardaki olasılıklar toplamı, sağ sütunda, sütunlardaki olasılıklar toplamı bulunmaktadır.

$x_1 \setminus x_2$	0	1	2	$P(X_1=x_1)$
1	2/10	1/10	1/10	4/10
2	1/10	1/10	0	2/10
3	1/10	1/10	2/10	4/10
$P(X_2=x_2)$	4/10	3/10	3/10	1

Tablodan, kolayca görüldüğü gibi,

$$f(1,1)=P(X_1=1,X_2=1)=2/10$$
$$P(X_1=1)=4/10$$
$$P(X_2=1)=4/10$$

dır. Alt satır, esasında $X_2:\Omega\to\mathbb{R}$ rasgele değişkeninin olasılık tablosunu ve sağ sütun $X_1:\Omega\to\mathbb{R}$ rasgele değişkeninin olasılık tablosunu vermektedir.

x_2	0	1	2
$P(X_2=x_2)$	4/10	3/10	3/10

ve

x_1	1	2	3
$P(X_1=x_1)$	4/10	2/10	4/10

olasılık dağılımlarına (X_1,X_2) rasgele vektörünün marjinal dağılımları denmektedir. Buraya kadar sezgisel olarak tanıtmaya çalıştığımız kavramların tanımları aşağıdaki gibidir.

Tanım (Ω,U,P) bir olasılık uzayı ve

$$\begin{aligned}(X_1,X_2,...,X_n):\ \ \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^m\\ \omega &\longrightarrow (X_1,X_2,...,X_n)(\omega)=(X_1(\omega),X_2(\omega),...,X_n(\omega))\end{aligned}$$

olmak üzere, $\forall\ (a_1,a_2,...,a_n)\in\mathbb{R}^n$ için,

$$\{\omega\in\Omega: X_1(\omega)\le a_1, X_2(\omega)\le a_2,...,X_n(\omega)\le a_n\}\in U$$

oluyorsa, $(X_1,X_2,...,X_n)$ fonksiyonuna (vektör değerli fonksiyona) bir **rasgele vektör** denir.

Tanım (Ω,U,P) bir olasılık uzayı ve

$$
\begin{array}{rccl}
(X_1, X_2, ..., X_n): & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\
& \omega & \longrightarrow & (X_1, X_2, ..., X_n)(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_n(\omega))
\end{array}
$$

bir rasgele vektör olmak üzere,

$$
\begin{array}{rcl}
F_{X_1, X_2, ..., X_n}: \quad \mathbb{R}^n & \rightarrow & [0,1] \\
(x_1, x_2, ..., x_n) & \rightarrow & F_{X_1, X_2, ..., X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, ..., X_n \le x_n)
\end{array}
$$

fonksiyonuna $(X_1, X_2, ..., X_n)$ rasgele vektörünün dağılım fonksiyonu denir.