Kesikli Rasgele Vektörler

Tanım Bir $(X_1, X_2, ..., X_n)$ rasgele vektörünün aldığı değerlerin kümesi $D_{(X_1, X_2, ..., X_n)}$ sonlu veya sayılabilir sonsuz elemanlı olduğunda rasgele vektöre kesikli rasgele vektör denir.

Tanım $(X_1, X_2, ..., X_n)$ kesikli bir rasgele vektör olmak üzere,

$$f_{X_1, X_2, ..., X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n) \quad , \quad (x_1, x_2, ..., x_n) \in D_{(X_1, X_2, ..., X_n)}$$

fonksiyonuna $(X_1, X_2, ..., X_n)$ 'in olasılık fonksiyonu denir.

$$\begin{cases} 1) \ f_{X_1, X_2, ..., X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0 \ , \ (x_1, x_2, ..., x_n) \in D_{(X_1, X_2, ..., X_n)} \\ \\ 2) \ \displaystyle\sum\sum ... \sum_{(x_1, x_2, ..., x_n) \in D_{(X_1, X_2, ..., X_n)}} f_{X_1, X_2, ..., X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = 1 \end{cases}$$

Tanım Kesikli bir $(X_1, X_2, ..., X_n)$ rasgele vektörü için,

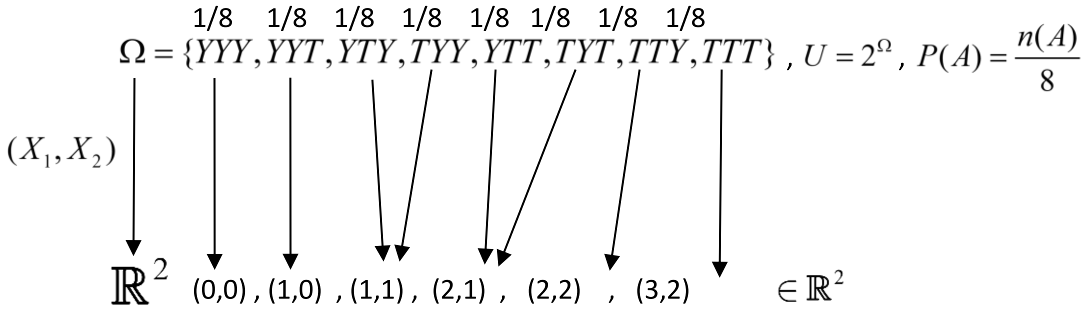
$$f_{X_j}(x_j) = P(X_j = x_j) = \sum_{x_1} ... \sum_{x_{j-1}} \sum_{x_{j+1}} ... \sum_{x_n} f_{X_1, X_2, ..., X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) \ , \ x_j \in D_{X_j} \ , \ j=1,2,...,n$$

bir olasılık fonksiyonu olup, bu fonksiyona X_j 'nin marjinal olasılık fonksiyonu denir.

Örnek Düzgün bir paranın üç kez atılışını anlatan (modelleyen) olasılık uzayı,

$$\Omega = \{YYY, YYT, YTY, TYY, YTT, TYT, TTY, TTT\}, \ U = 2^\Omega, \ P(A) = \frac{n(A)}{8}$$

olmak üzere,



olarak tanımlanan $(X_1, X_2): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ rasgele vektöründe, X_1 bileşeni üç atışta gelen tura sayısını, X_2 bileşeni ilk iki atışta gelen tura sayısını göstermektedir. Bu rasgele vektörün aldığı değerlerin kümesi,

$$D_{(X_1, X_2)} = \ (0,), (1,0), \ (1,1), (2,1), (2,2), \ (3,2)$$

dır. (X_1, X_2) rasgele vektörünün olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \begin{cases} 1/8 & , \quad (x_1,x_2) = (0,0) \\ 1/8 & , \quad (x_1,x_2) = (1,0) \\ 2/8 & , \quad (x_1,x_2) = (1,1) \\ 2/8 & , \quad (x_1,x_2) = (2,1) \\ 1/8 & , \quad (x_1,x_2) = (2,2) \\ 1/8 & , \quad (x_1,x_2) = (3,2) \end{cases}$$

ve olasılık tablosu,

$x_1 \diagdown x_2$	0	1	2	$P(X_1 = x_1)$
0	1/8	0	0	1/8
1	1/8	2/8	0	3/8
2	0	2/8	1/8	3/8
3	0	0	1/8	1/8
$P(X_2 = x_2)$	2/8	4/8	2/8	1

dır. X_1 ‘in marjinal olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_1}(x_1) = P(X_1 = x_1) = \sum_{x_2} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} 1/8 & , \quad x_1 = 0 \\ 3/8 & , \quad x_1 = 1 \\ 3/8 & , \quad x_1 = 2 \\ 1/8 & , \quad x_1 = 3 \end{cases}$$

$$f_{X_1}(x_1) = \binom{3}{x_1}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad , \quad x_1 = 0,1,2,3$$

ve olasılık tablosu,

x_1	0	1	2	3
$f_{X_1}(x_1)$	1/8	3/8	3/8	1/8

dır.

X_2 ‘nin marjinal olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_2}(x_2) = P(X_2 = x_2) = \sum_{x_1} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} 1/4 & , \quad x_2 = 0 \\ 1/2 & , \quad x_2 = 1 \\ 1/4 & , \quad x_2 = 2 \end{cases}$$

ve olasılık tablosu,

x_2	0	1	2
$f_{X_2}(x_2)$	1/4	1/2	1/4

dır.

X_1 rasgele değişkeni düzgün bir paranın üç kez atılışında gelen turaların sayısı olmak üzere,

$$P(X_1 = 1) = P(\{YYT, YTY, TYY\}) = 3/8$$

olup, bu olasılığı f_{X_1,X_2} veya f_{X_1} fonksiyonu yardımıyla hesaplayabiliriz.

$$P(X_1=1)=P(X_1=1,X_2=0)+P(X_1=1,X_2=1)=f_{X_1,X_2}(1,0)+f_{X_1,X_2}(1,1)=1/8+2/8=3/8$$

$$P(X_1=1)=f_{X_1}(1)=3/8$$

Üç atışta gelen tura sayısının ilk iki atışta gelen tura sayısına eşit olması olasılığı,

$$\begin{aligned}P(X_1=X_2)&=P(X_1=0,X_2=0)+P(X_1=1,X_2=1)+P(X_1=2,X_2=2)\\&=f_{X_1,X_2}(0,0)+f_{X_1,X_2}(1,1)+f_{X_1,X_2}(2,2)\\&=1/8+2/8+1/8=1/2\end{aligned}$$

dır.

<u>Örnek</u> Bir torbada 5 beyaz, 10 siyah ve15 mavi top bulunsun. Torbadan aynı anda 10 top çekildiğinde gelen beyaz topların sayısı X_1, siyah topların sayısı X_2 ve mavi topların sayısı X_3 rasgele değişkeni olsun. X_1, X_2, X_3 rasgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)=\frac{\binom{5}{x_1}\binom{10}{x_2}\binom{15}{x_3}}{\binom{30}{10}}\quad,\quad\begin{array}{l}x_1=0,1,2,3,4,5\\x_2=0,1,2,...,10\\x_3=0,1,2,...,10\\x_1+x_2+x_3=10\end{array}$$

dır. Böyle bir dağılıma çok değişkenli hipergeometrik dağılım denir.

X_1 ‘in marjinal olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_1}(x_1)=\underbrace{\sum_{x_2=1}^{10}\sum_{x_3=1}^{10}}_{x_1+x_2+x_3=10}\frac{\binom{5}{x_1}\binom{10}{x_2}\binom{15}{x_3}}{\binom{30}{10}}=\frac{\binom{5}{x_1}}{\binom{30}{10}}\underbrace{\sum_{x_2=0}^{10}\sum_{x_3=0}^{10}}_{x_1+x_2+x_3=10}\binom{10}{x_2}\binom{15}{x_3}=\frac{\binom{5}{x_1}}{\binom{30}{10}}\binom{25}{10-x_1}$$

$$=\frac{\binom{5}{x_1}\binom{25}{10-x_1}}{\binom{30}{10}}\ ,\ x_1=0,1,2,3,4,5$$

olup benzer şekilde X_2 ‘nin marjinal olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_2}(x_2)=\frac{\binom{10}{x_2}\binom{40}{10-x_2}}{\binom{50}{10}}\quad,\quad x_2=0,1,2,...,10$$

ve X_3 ‘ün marjinal olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_3}(x_3)=\frac{\binom{15}{x_3}\binom{35}{10-x_3}}{\binom{50}{10}}\quad,\quad x_3=0,1,2,...,10$$

dır.

Örnek Bir torbada 5 beyaz, 10 siyah ve 15 mavi top bulunsun. Torbadan iadeli olarak 10 kez birer top çekildiğinde gelen beyaz topların sayısı X_1, siyah topların sayısı X_2 ve mavi topların sayısı X_3 rasgele değişkeni olsun. X_1, X_2, X_3 rasgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3) = \frac{10!}{x_1!x_2!x_3!}\left(\frac{5}{30}\right)^{x_1}\left(\frac{10}{30}\right)^{x_2}\left(\frac{15}{30}\right)^{x_3} \quad , \quad \begin{array}{l} x_1,x_2,x_3 = 0,1,...,10 \\ x_1+x_2+x_3 = 10 \end{array}$$

dır. Bu dağılımdaki olasılıklar,

$$\left(\frac{5}{30}+\frac{10}{30}+\frac{15}{30}\right)^{10} = \underbrace{\sum_{x_1=0}^{10}\sum_{x_2=0}^{10}\sum_{x_3=0}^{10}}_{x_1+x_2+x_3=10} \frac{10!}{x_1!x_2!x_3!}\left(\frac{5}{30}\right)^{x_1}\left(\frac{10}{30}\right)^{x_2}\left(\frac{15}{30}\right)^{x_3}$$

üç terimlinin açılımındaki terimlerdir.

X_1 'in marjinal olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_1}(x_1) = \underbrace{\sum_{x_2=0}^{10}\sum_{x_3=0}^{10}}_{x_2+x_3=10-x_1} \frac{10!}{x_1!x_2!x_3!}\left(\frac{5}{30}\right)^{x_1}\left(\frac{10}{30}\right)^{x_2}\left(\frac{15}{30}\right)^{x_3} = \frac{10!}{x_1!}\left(\frac{5}{30}\right)^{x_1} \underbrace{\sum_{x_2=0}^{10}\sum_{x_3=0}^{10}}_{x_2+x_3=10-x_1} \frac{1}{x_2!x_3!}\left(\frac{10}{30}\right)^{x_2}\left(\frac{15}{30}\right)^{x_3}$$

$$= \frac{10!}{x_1!}\left(\frac{5}{50}\right)^{x_1} \frac{1}{(10-x_1)!} \underbrace{\sum_{x_2=0}^{10}\sum_{x_3=0}^{10}}_{x_2+x_3=10-x_1} \frac{(10-x_1)!}{x_2!x_3!}\left(\frac{10}{30}\right)^{x_2}\left(\frac{15}{30}\right)^{x_3} = \frac{10!}{x_1!}\left(\frac{5}{50}\right)^{x_1} \frac{1}{(10-x_1)!}\left(\frac{10}{30}+\frac{15}{30}\right)^{10-x_1}$$

$$= \frac{10!}{x_1!(10-x_1)!}\left(\frac{5}{30}\right)^{x_1}\left(\frac{25}{30}\right)^{10-x_1} \quad , \quad x_1 = 0,1,2,...,10$$

olup benzer şekilde X_2 'nin marjinal olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_2}(x_2) = \binom{10}{x_2}\left(\frac{10}{50}\right)^{x_2}\left(\frac{40}{50}\right)^{10-x_2} \quad , \quad x_2 = 0,1,2,...,10$$

dır. X_3 'ün marjinal olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_3}(x_3) = \binom{10}{x_3}\left(\frac{15}{50}\right)^{x_3}\left(\frac{35}{50}\right)^{10-x_3} \quad , \quad x_3 = 0,1,2,...,10$$

dır.

Örnek X_1, X_2, X_3 rasgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3) = c\,x_1(x_2+x_3) \qquad , \quad x_1,x_2,x_3 = 1,2$$

olsun. *c* pozitif bir sabit sayı olup,

$$c\ \ 1\times(1+1)+1\times(1+2)+1\times(2+1)+1\times(2+2)+2\times(1+1)+2\times(1+2)+2\times(2+1)+2\times(2+2) \ \ =1$$

$$c = \frac{1}{36}$$

dır. Buna göre X_1, X_2, X_3 rasgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{36}x_1(x_2+x_3) \qquad , \quad x_1,x_2,x_3 = 1,2$$

olmak üzere, X_1 ‘in marjinal olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2=1}^{2}\sum_{x_3=1}^{2}\frac{1}{36}x_1(x_2+x_3) = \frac{1}{3}x_1 \quad , \quad x_1 = 1,2$$

X_2 ‘nin marjinal olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_2}(x_2) = \sum_{x_1=1}^{2}\sum_{x_3=1}^{2}\frac{1}{36}x_1(x_2+x_3) = \frac{1}{12}(2x_2+3) \quad , \quad x_2 = 1,2$$

X_3 ‘ün marjinal olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_3}(x_3) = \sum_{x_1=1}^{2}\sum_{x_2=1}^{2}\frac{1}{36}x_1(x_2+x_3) = \frac{1}{12}(3+2x_3) \quad , \quad x_3 = 1,2$$

dır.

X_2, X_3 ‘ün marjinal ortak olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_2,X_3}(x_2,x_3) = \sum_{x_1=1}^{2}\frac{1}{36}x_1(x_2+x_3) = \frac{1}{12}(x_2+x_3) \quad , \quad x_2,x_3 = 1,2$$

X_1, X_3 ‘ün marjinal ortak olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_1,X_3}(x_1,x_3) = \sum_{x_2=1}^{2}\frac{1}{36}x_1(x_2+x_3) = \frac{1}{36}x_1(3+2x_3) \quad , \quad x_1,x_3 = 1,2$$

X_1, X_2 ‘nin marjinal ortak olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \sum_{x_3=1}^{2}\frac{1}{36}x_1(x_2+x_3) = \frac{1}{36}x_1(2x_2+3) \quad , \quad x_1,x_2 = 1,2$$

dır.