Sürekli Rasgele Vektörler

Tanım Bir $(X_1, X_2, ..., X_n)$ rasgele vektörünün $F_{X_1,X_2,...,X_n} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ dağılım fonksiyonu,

$$\begin{cases} 1)\ f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0 \ ,\ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \\ \\ 2)\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}...\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1 dx_2 ... dx_n = 1 \end{cases}$$

özelliklerine sahip bir f fonksiyonu yardımıyla,

$$F_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_n} ... \int\limits_{-\infty}^{x_2}\int\limits_{-\infty}^{x_1} f(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1 dx_2 ... dx_n \qquad ,\quad (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

biçiminde yazılabiliyorsa, $(X_1, X_2, ..., X_n)$ rasgele vektörüne sürekli rasgele vektör (mutlak sürekli rasgele vektör) ve f fonksiyonuna $(X_1, X_2, ..., X_n)$ rasgele vektörünün olasılık yoğunluk fonksiyonu denir. f fonksiyonu $f_{X_1,X_2,...,X_n}$ biçiminde de gösterilir.

Sürekli bir $(X_1, X_2, ..., X_n)$ rasgele vektörü için,

$$P(a_1 < X_1 < b_1, a_2 < X_2 < b_2, ..., a_n < X_n < b_n) = \int\limits_{a_n}^{b_n} ... \int\limits_{a_2}^{b_2}\int\limits_{a_1}^{b_1} f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1 dx_2 ... dx_n$$

dır.

Tanım Sürekli bir $(X_1, X_2, ..., X_n)$ rasgele vektörü için,

$$f_{X_j}(x_j) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1 ... dx_{j-1} dx_{j+1} ... dx_n \qquad ,\quad j=1,2,...,n$$

bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olup, bu fonksiyona X_j 'nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu denir.

$(X_1, X_2, ..., X_n)$ rasgele vektörünün olasılık (yoğunluk) fonksiyonu olan $f_{X_1,X_2,...,X_n}$ olasılık (yoğunluk) fonksiyonuna $X_1, X_2, ..., X_n$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık (yoğunluk) fonksiyonu da denir.

Örnek X_1, X_2, X_3 rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} ce^{-\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3)} & ,\ x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0 \\ 0 & ,\ d.y. \end{cases}$$

olsun. c pozitif bir sabit sayı olup,

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty ce^{-\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3)}dx_1dx_2dx_3=1$$

$$c\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x_1}e^{-\frac{1}{2}x_2}e^{-\frac{1}{2}x_2}dx_1dx_2dx_3=1$$

$$c\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x_1}dx_1\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x_2}dx_2\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x_2}dx_3=1$$

$$c\left(\left.\frac{e^{-\frac{1}{2}x_1}}{-\frac{1}{2}}\right|_{x_1=0}^{\infty}\right)\left(\left.\frac{e^{-\frac{1}{2}x_2}}{-\frac{1}{2}}\right|_{x_2=0}^{\infty}\right)\left(\left.\frac{e^{-\frac{1}{2}x_3}}{-\frac{1}{2}}\right|_{x_3=0}^{\infty}\right)=1$$

$$8c=1$$

$$c=\tfrac{1}{8}$$

dır. Buna göre X_1,X_2,X_3 rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3)} & ,\ x_1>0,x_2>0,x_3>0\\ 0 & ,\ d.y.\end{cases}$$

dır. X_1,X_2 ‘nin marjinal ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\int_0^\infty\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3)}dx_3=\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}(x_1+x_2)}\int_0^\infty\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}x_3}dx_3$$

$$=\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}(x_1+x_2)}\left.\frac{e^{-\frac{1}{2}x_3}}{-\frac{1}{2}}\right|_{x_3=0}^{\infty}=\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}(x_1+x_2)}2$$

$$=\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x_1+x_2)}\ ,\ x_1>0,x_2>0$$

dır.

X_1 ‘in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmaya çalışalım. X_1 ‘in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu X_1,X_2,X_3 'ün ortak dağılımından elde edebildiğimiz gibi X_1 , X_2 ‘nin ortak marjinal dağılımından da elde edebiliriz.

$$f_{X_1}(x_1)=\int_0^{\infty}\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x_1+x_2)}dx_2=\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x_1}\int_0^{\infty}e^{-\frac{1}{2}x_2}dx_2=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x_1} \quad , \quad x_1>0$$

olmak üzere benzer olarak X_2 ile X_3 'ün marjinal dağılımları aynı dağılımdır.

$$P(X_1<1)=\int_0^1 f_{X_1}(x_1)dx_1=\int_0^{\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x_1}dx_1=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-\frac{1}{2}x_1}dx_1=-e^{-\frac{1}{2}x_1}\Big|_0^1=1-e^{-\frac{1}{2}}$$

ve

$$P(X_1+X_2<1)=\int_0^1\int_0^{1-x_2} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2=\int_0^1\int_0^{1-x_2}\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x_1+x_2)}dx_1dx_2$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^{1-x_2}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x_1}dx_1\right)e^{-\frac{1}{2}x_2}dx_2$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(-e^{-\frac{1}{2}x_1}\Big|_0^{1-x_2}\right)e^{-\frac{1}{2}x_2}dx_2$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-e^{-\frac{1}{2}(1-x_2)}\right)e^{-\frac{1}{2}x_2}dx_2$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(e^{-\frac{1}{2}x_2}-e^{-\frac{1}{2}}\right)dx_2$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x_2}dx_2-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}}dx_2$$

$$=-e^{-\frac{1}{2}x_2}\Big|_0^1-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1-\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}$$

dır. Çok değişkenli sürekli dağılımlarda olasılık hesabı çok katlı integral hesabı bilinmesini gerektirmektedir. Çok değişkenli sürekli dağılımları ikinci sınıfta İST201 ve üçüncü sınıfta İST301 dersinde göreceksiniz.