Rasgele Vektörlerin Bağımsızlığı

Tanım $(X_1, X_2, ..., X_n)$ rasgele vektörünün olasılık (yoğunluk) fonksiyonu, başka bir ifade ile $X_1, X_2, ..., X_n$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık (yoğunluk) fonksiyonu,

$$f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) ... f_{X_n}(x_n) \quad , \quad (x_1, x_2, ..., x_n) \in D_{(X_1,X_2,...,X_n)}$$

biçiminde $X_1, X_2, ..., X_n$ 'lerin marjinal olasılık (yoğunluk) fonksiyonlarının çarpımı olarak yazılabiliyorsa $X_1, X_{2,} ..., X_n$ rasgele değişkenlerine **bağımsızdır** denir.

$(X_1, X_2, ..., X_n)$ rasgele vektörü kesikli olduğunda, $X_1, X_2, ..., X_n$ rasgele değişkenlerinin bağımsız olması demek, her $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D_{(X_1,X_2,...,X_n)}$ için

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) ... P(X_n = x_n)$$

olması demektir.

Örnek X_1, X_2, X_3 rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} ce^{-\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3)} & , \ x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0 \\ 0 & , \ d.y. \end{cases}$$

ve

$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x_1} & , \ x_1 > 0 \\ 0 & , \ d.y. \end{cases}$$

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x_2} & , \ x_2 > 0 \\ 0 & , \ d.y. \end{cases}$$

$$f_{X_3}(x_3) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x_3} & , \ x_3 > 0 \\ 0 & , \ d.y. \end{cases}$$

olmak üzere,

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) f_{X_3}(x_3)$$

olup, X_1, X_2, X_3 rasgele değişkenleri bağımsızdır.

Örnek Düzgün bir tavla zarının iki kez ard arda atılması deneyinde 1.atışta gelen nokta sayısı X_1, 2. atışta gelen nokta sayısı X_2 olsun. $\left(X_1, X_2\right)$ ' nin ortak olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=P(X_1=x_1,X_2=x_2)=\frac{1}{36} \quad , \quad x_1,x_2=1,2,3,4,5,6$$

X_1 ' in marjinal olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_1}(x_1)=\sum_{x_2} f_{x_1,x_2}(x_1,x_2)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6} \quad , \quad x_1=1,2,3,4,5,6$$

X_2 ' nin marjinal olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_2}(x_2)=\sum_{x_1} f_{x_1,x_2}(x_1,x_2)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6} \quad , \quad x_2=1,2,3,4,5,6$$

olmak üzere,

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$$

olduğundan, X_1 ve X_2 rasgele değişkenleri bağımsızdır.

Örnek X_1,X_2 ‘nin ortak olasılık fonksiyonu.

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=cx_1x_2 \quad , \quad (x_1,x_2)\in\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,0),(2,1),(2,2)\}$$

olsun.

c =?

c(1×1+1×2+1×3+2×0+2×1+2×2)=1

12c=1

$c=\frac{1}{12}$

olmak üzere, X_1,X_2 ‘nin ortak olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{12}x_1x_2 \quad , \quad (x_1,x_2)\in\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,0),(2,1),(2,2)\}$$

olasılık tablosu,

$x_1 \setminus x_2$	0	1	2	3	$P(X_1=x_1)$
1	0	1/12	2/12	3/12	6/12
2	0	2/9	4/9	0	6/12
$P(X_2=x_2)$	0	3/12	6/12	3/12	1

dır. Marjinal dağılımların olasılık tabloları,

x_1	1	2
$f_{X_1}(x_1)$	$6/12$	$6/12$

x_2	1	2	3
$f_{X_2}(x_2)$	$3/12$	$6/12$	$3/12$

olup,

$$f_{X_1,X_2}(1,1)\neq f_{X_1}(1).f_{X_2}(1)$$

$$1/12 \neq 6/12 \quad 3/12$$

olduğundan X_1,X_2 bağımsız değildir.

Örnek Bir kavanozda 3 kırmızı, 2 siyah ve 2 beyaz top bulunmaktadır. Aynı anda 3 top çekildiğinde**,**

X_1 - gelen kırmızı topların,

X_2 - gelen siyah topların

sayısı olsun.

$\left(X_1, X_2\right)$ nin olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\frac{\binom{3}{x_1}\binom{2}{x_2}\binom{2}{3-x_1-x_2}}{\binom{7}{3}} \quad , \quad (x_1,x_2)\in\{(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(3,0)\}$$

$$f_{X_1,X_2}(0,1)=\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}}{35}=\frac{2}{35}$$

$$f_{X_1,X_2}(0,2)=\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{2}\binom{2}{1}}{35}=\frac{2}{35}$$

$$f_{X_1,X_2}(1,0)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{35}=\frac{3}{35}$$

$$f_{X_1,X_2}(1,1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{35}=\frac{12}{35}$$

$$f_{X_1,X_2}(1,2)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}\binom{2}{0}}{35}=\frac{3}{35}$$

$$f_{X_1,X_2}(2,0)=\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{2}{1}}{35}=\frac{6}{35}$$

$$f_{X_1,X_2}(2,1)=\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}\binom{2}{0}}{35}=\frac{6}{35}$$

$$f_{X_1,X_2}(3,0)=\frac{\binom{3}{3}\binom{2}{0}\binom{2}{0}}{35}=\frac{1}{35}$$

x_1	0	1	2	3
$f_{X_1}(x_1)$	$4/35$	$18/35$	$12/35$	$1/35$

x_2	0	1	2
$f_{X_2}(x_2)$	$10/35$	$20/35$	$5/35$

ve

$$f_{X_1,X_2}(3,0)\neq f_{X_1}(3)\,f_{X_2}(0)$$

olmak üzere, X_1 ile X_2 bağımsız değildir.

Örnek Bir kasabada 4 tane kavşak bulunmaktadır. Bu kavşaklar için bir günde meydana gelen trafik kazası sayıları X_1, X_2, X_3, X_4 olmak üzere her biri $\lambda = 2$ ortalama ile Poisson dağılımına sahiptir ve birbirinden bağımsızdır. Bu kasabada bir günde toplam 2 kaza olması olasılığı nedir.

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{e^{-2}2^{x_1}}{x_1!} \quad , \quad x_1 = 0,1,2,3,...$$

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{e^{-2}2^{x_2}}{x_2!} \quad , \quad x_2 = 0,1,2,3,...$$

$$f_{X_3}(x_3) = \frac{e^{-2}2^{x_3}}{x_3!} \quad , \quad x_3 = 0,1,2,3,...$$

$$f_{X_4}(x_3) = \frac{e^{-2}2^{x_4}}{x_4!} \quad , \quad x_4 = 0,1,2,3,...$$

ve

$$\begin{aligned} f_{X_1,X_2,X_3,X_4}(x_1,x_2,x_3,x_4) &= f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) f_{X_3}(x_3) f_{X_4}(x_3) \\ &= \frac{e^{-2}2^{x_1}}{x_1!} \frac{e^{-2}2^{x_2}}{x_2!} \frac{e^{-2}2^{x_4}}{x_4!} \frac{e^{-2}2^{x_4}}{x_4!} \\ &= \frac{e^{-8}2^{(x_1+x_2+x_3+x_4)}}{x_1!x_2!x_3!x_4!} \quad , \quad x_1,x_2,x_3,x_4 = 0,1,2,3,... \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} P(X_1+X_2+X_3+X_4=2) &= P(X_1=2, X_2=0, X_3=0, X_4=0) + P(X_1=0, X_2=2, X_3=0, X_4=0) \\ &+ P(X_1=0, X_2=0, X_3=2, X_4=0) + P(X_1=0, X_2=0, X_3=0, X_4=2) \\ &+ P(X_1=1, X_2=1, X_3=0, X_4=0) + P(X_1=1, X_2=0, X_3=1, X_4=0) \\ &+ P(X_1=1, X_2=0, X_3=0, X_4=1) + P(X_1=0, X_2=1, X_3=1, X_4=0) \\ &+ P(X_1=0, X_2=1, X_3=0, X_4=1) + P(X_1=0, X_2=0, X_3=1, X_4=1) \\ &= 4 \times \frac{e^{-8}2^2}{2!0!0!0!} + 6 \times \frac{e^{-8}2^2}{1!1!0!0!} \\ &= 8e^{-8}2^2 \\ &= 32e^{-8} \\ &= 0.010735 \end{aligned}$$

Önümüzdeki derslerde, her biri Poisson dağılımına sahip rasgele değişkenlerin toplamlarının da Poisson dağılımına sahip olduğunu göreceğiz. $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ toplamı $\lambda = 8$ olan Poisson dağılımına sahip olup,

$$P(X_1+X_2+X_3+X_4=2) = \frac{e^{-8}8^2}{2!} = 32e^{-8}$$

olduğunu kolayca hesaplayacağız.