Rasgele Vektörlerde Beklenen Değer ve Kovaryans

Tanım 1 $(X_1, X_2 ..., X_n)$ bir rasgele vektör ve g : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olmak üzere, kesikli dağılımlarda $\sum\limits_{x_1}\sum\limits_{x_2}\cdots\sum\limits_{x_n}\left|g\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\right| f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)$ toplamının ve sürekli dağılımlarda $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\mathrm{g}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\right| f_{X_1,X_2,...,X_n}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)dx_1dx_2...dx_n$ integralinin sonlu olması halinde,

$$E\left[g\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)\right]=\begin{cases}\sum\limits_{x_1}\sum\limits_{x_2}\cdots\sum\limits_{x_n} g\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{g}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) f_{X_1,X_2,...,X_n}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)dx_1dx_2...dx_n\end{cases}$$

sayısına $g\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ 'nin beklenen değeri denir.

Tanım 2 $(X_1, X_2 ..., X_n)$ bir rasgele vektör olmak üzere, $j = 1, 2, ..., n$ için

$$E(X_j)=\begin{cases}\sum\limits_{x_1}\cdots\sum\limits_{x_{j-1}}\sum\limits_{x_{j+1}}\cdots\sum\limits_{x_n} x_j f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_j f_{X_1,X_2,...,X_n}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)dx_1...dx_{j-1}dx_{j+1}...dx_n\end{cases} = \begin{cases}\sum\limits_{x_j} x_j f_{X_j}(x_j) \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_j f_{X_j}\left(x_j\right)dx_j\end{cases}$$

sayısı X_j nin beklenen değeri olmak üzere,

$$Cov(X_i, X_j) = E \quad X_i - E(X_i) \ (X_j - E(X_j)) \quad , \quad i, j = 1, 2, ..., n$$

sayısına X_i ile X_j 'nin kovaryansı denir. $j = 1, 2, ..., n$ için $Cov(X_j, X_j) = Var(X_j)$ olmak üzere ,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} Cov(X_1, X_1) & Cov(X_1, X_2) & \cdots & Cov(X_1, X_n) \\ Cov(X_2, X_1) & Cov(X_2, X_2) & \cdots & Cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_2) & \cdots & Cov(X_n, X_n) \end{bmatrix}$$

matrisine $X_1, X_2 ..., X_n$ rasgele değişkenlerinin varyans-kovaryans matrisi denir.

. Kovaryans σ_{ij} $(\sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j))$ ile de gösterilir. $j = 1, 2, ..., n$ için $\sigma_{jj} = Cov(X_j, X_j) = Var(X_j)$ dır.

Tanım 3 $(X_1, X_2 ..., X_n)$ bir rasgele vektör olmak üzere,

$$\rho_{X_i, X_j} = \frac{Cov(X_i, X_j)}{\sqrt{Var(X_i)Var(X_j)}} \quad , \quad i, j = 1, 2, ..., n$$

sayısına X_i ile X_j arasındaki korelasyon katsayısı denir. $j = 1, 2, ..., n$ için $\rho_{X_j, X_j} = 1$ olmak üzere,

$$R=\begin{bmatrix} 1 & \rho_{X_1,X_2} & \cdots & \rho_{X_1,X_n} \\ \rho_{X_2,X_1} & 1 & \cdots & \rho_{X_2,X_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{X_n,X_1} & \rho_{X_n,X_2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

matrisine $X_1, X_2..., X_n$ rasgele değişkenlerinin korelasyon matrisi denir.

Teorem 1 a) $Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$

b) $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$Cov(aX_i + b, cX_j + d) = acCov(X_i, X_j)$$

$$\rho_{aX_i+b,cX_j+b} = \frac{ac}{|a||c|}\rho_{X_i,X_j}$$

dır.

İspat: (Ödev)

Örnek 1 X_1, X_2, X_3 rasgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{45}x_1(x_2+x_3) \ , \quad \begin{array}{l} x_1 = 1,2 \\ x_2 = 0,1,2 \\ x_3 = 1,2 \end{array}$$

olsun.

$$E(X_1) = \sum_{x_1}\sum_{x_2}\sum_{x_3} x_1 f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3) = \sum_{x_1=1}^{2}\sum_{x_2=0}^{2}\sum_{x_3=1}^{2} x_1 \frac{1}{45}x_1(x_2+x_3) = \frac{1}{45}\sum_{x_1=1}^{2}\sum_{x_2=0}^{2}\sum_{x_3=1}^{2} x_1^2(x_2+x_3)$$

$$= \frac{1}{45}\sum_{x_1=1}^{2}\sum_{x_2=0}^{2} x_1^2(2x_2+3) = \frac{1}{45}\sum_{x_1=1}^{2} 15x_1^2 = \frac{5}{3}$$

olmak üzere, bu beklenen değeri X_1 ‘in marjinal dağılımından da bulabiliriz. X_1 ‘in marjinal olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2=0}^{2}\sum_{x_3=1}^{2} \frac{1}{45}x_1(x_2+x_3) = \frac{1}{3} \ , \ x_1 = 1,2$$

ve olasılık tablosu,

x_1	1	2
$f_{X_1}(x_1)$	1/3	2/3

olup

$$E(X_1) = 1\times\frac{1}{3} + 2\times\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

dır.

$E(X_1X_2)$ değerini hesaplayalım.

$$E(X_1X_2)=\sum_{x_1}\sum_{x_2}\sum_{x_3}x_1x_2 f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)=\sum_{x_1=1}^{2}\sum_{x_2=0}^{2}\sum_{x_3=1}^{2}x_1x_2\frac{1}{45}x_1(x_2+x_3)$$
$$=\frac{1}{45}\sum_{x_1=1}^{2}\sum_{x_2=0}^{2}\sum_{x_3=1}^{2}x_1^2(x_2^2+x_2x_3)$$
$$=\frac{1}{45}\sum_{x_1=1}^{2}\sum_{x_2=0}^{2}x_1^2(2x_2^2+3x_2)=\frac{19}{45}\sum_{x_1=1}^{2}x_1^2=\frac{19}{9}$$

olmak üzere, bu değeri (X_1,X_2) vektörünün marjinal dağılımından (X_1 ile X_2 'nin marjinal ortak dağılımından) da bulabiliriz. X_1 ile X_2 'nin marjinal ortak olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\sum_{x_3}f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)=\sum_{x_3=1}^{2}\frac{1}{45}x_1(x_2+x_3)=\frac{1}{45}x_1(2x_2+3) \quad , \quad \begin{array}{l} x_1=1,2 \\ x_2=0,1,2 \end{array}$$

olmak üzere, olasılık tablosu

$x_1 \setminus x_2$	0	1	2	$f_{X_1}(x_1)= P(X_1=x_1)$
1	3/45	5/45	7/45	15/45
2	6/45	10/45	14/45	30/45
$f_{X_2}(x_2)= P(X_2=x_2)$	9/45	15/45	21/45	1

olup,

$$E(X_1X_2)=\sum_{x_1=1}^{2}\sum_{x_2=0}^{2}x_1x_2 f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$$

$$=1\times0\times f_{X_1,X_2}(1,0)+1\times1\times f_{X_1,X_2}(1,1)+1\times2\times f_{X_1,X_2}(1,2)+2\times0\times f_{X_1,X_2}(2,0)+2\times1\times f_{X_1,X_2}(2,1)+2\times2\times f_{X_1,X_2}(2,2)$$

$$=1\times0\times\frac{3}{45}+1\times1\times\frac{5}{45}+1\times2\times\frac{7}{45}+2\times0\times\frac{6}{45}+2\times1\times\frac{10}{45}+2\times2\times\frac{14}{45}=\frac{95}{45}=\frac{19}{9}$$

dır. Tablodan görüldüğü gibi, X_2 'nin marjinal dağılımının olasılık tablosu,

x_2	0	1	2
$f_{X_2}(x_2)$	9/45	15/45	21/45

olup,

$$E(X_2)=0\times\frac{9}{45}+1\times\frac{15}{45}+2\times\frac{21}{45}=\frac{57}{45}$$
$$E(X_2^2)=0^2\times\frac{9}{45}+1^2\times\frac{15}{45}+2^2\times\frac{21}{45}=\frac{99}{45}$$
$$Var(X_2^2)=E(X_2^2)-(E(X_2))^2=\frac{99}{45}-(\frac{57}{45})^2=\frac{1206}{2025}$$

dır.

Şimdi X_1,X_2,X_3 rasgele değişkenlerinin varyans-kovaryans matrisini hesaplamaya çalışalım. İlk önce ikişerli marjinal dağılımları elde edelim. Yukarıda, X_1 ile X_2 'nin marjinal ortak olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\sum_{x_3} f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)=\sum_{x_3=1}^{2}\frac{1}{45}x_1(x_2+x_3)=\frac{1}{45}x_1(2x_2+3) \quad , \quad \begin{matrix} x_1=1,2 \\ x_2=0,1,2 \end{matrix}$$

olmak üzere, olasılık tablosu

$x_1 \setminus x_2$	0	1	2	$f_{X_1}(x_1)=$ $P(X_1=x_1)$
1	3/45	5/45	7/45	15/45
2	6/45	10/45	14/45	30/45
$f_{X_2}(x_2)=$ $P(X_2=x_2)$	9/45	15/45	21/45	1

olduğunu bulmuştuk. Ayrıca,

$$E(X_1)=\frac{5}{3} \quad , \quad E(X_1^2)=3 \quad , \quad Var(X_1)=\frac{2}{9}$$
$$E(X_2)=\frac{57}{45} \quad , \quad E(X_2^2)=\frac{76}{45} \quad , \quad Var(X_2)=\frac{171}{2025}$$
$$E(X_1X_2)=\frac{19}{9}$$

olmak üzere,

$$Cov(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)=\frac{19}{9}-\frac{5}{7}\times\frac{57}{45}=\frac{32}{21}$$

değerlerini böyle bir tablodan kolayca hesapladık.

Benzer şekilde, X_2 ile X_3 ‘ün marjinal ortak olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_2,X_3}(x_2,x_3)=\sum_{x_1} f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)=\sum_{x_1=1}^{2}\frac{1}{45}x_1(x_2+x_3)=\frac{1}{15}(x_2+x_3) \quad , \quad \begin{matrix} x_2=0,1,2 \\ x_3=1,2 \end{matrix}$$

olup, olasılık tablosu,

$x_3 \setminus x_2$	0	1	2	$f_{X_3}(x_3)=$ $P(X_3=x_3)$
1	1/15	2/15	3/15	6/15
2	2/15	3/15	4/15	9/15
$f_{X_2}(x_2)=$ $P(X_2=x_2)$	3/15	5/15	7/15	1

ve

$$E(X_2)=\frac{19}{15}$$
$$E(X_3)=\frac{24}{15}=\frac{8}{5} \quad , \quad E(X_3^2)=\frac{42}{15}=\frac{14}{5} \quad , \quad Var(X_3)=\frac{6}{25}$$

$$E(X_2X_3)=\frac{30}{15}=2$$

$$Cov(X_2,X_3)=E(X_2X_3)-E(X_2)E(X_3)=2-\frac{19}{15}\times\frac{8}{5}=-\frac{2}{75}$$

dır.

X_1 ile X_3 ‘ün marjinal ortak olasılık fonksiyonu,

$$f_{X_1,X_3}(x_2,x_3)=\sum_{x_2} f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)=\sum_{x_2=0}^{2}\frac{1}{45}x_1(x_2+x_3)=\frac{1}{15}x_1(1+x_3)\quad ,\qquad \begin{matrix} x_1=1,2 \\ x_3=1,2 \end{matrix}$$

olup, olasılık tablosu,

$x_3 \setminus x_1$	1	2	$f_{X_3}(x_3)= P(X_3=x_3)$
1	2/15	4/15	6/15
2	3/15	6/15	9/15
$f_{X_1}(x_1)=P(X_1=x_1)$	5/15	10/15	1

ve

$$E(X_1)=\frac{5}{3}\quad ,\qquad E(X_3)=\frac{8}{5}\quad ,\qquad E(X_1X_2)=\frac{40}{15}$$

$$Cov(X_1,X_3)=E(X_1X_3)-E(X_1)E(X_3)=\frac{40}{15}-\frac{5}{3}\times\frac{8}{5}=0$$

dır.

X_1,X_2,X_3 rasgele değişkenlerinin varyans-kovaryans matrisi

$$\Sigma=\begin{bmatrix} Cov(X_1,X_1) & Cov(X_1,X_2) & Cov(X_1,X_3) \\ Cov(X_2,X_1) & Cov(X_2,X_2) & Cov(X_2,X_3) \\ Cov(X_3,X_1) & Cov(X_3,X_2) & Cov(X_3,X_3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1,X_2) & Cov(X_1,X_3) \\ Cov(X_2,X_1) & Var(X_2) & Cov(X_2,X_3) \\ Cov(X_3,X_1) & Cov(X_3,X_2) & Var(X_3) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{32}{21} & 0 \\ \frac{32}{21} & \frac{171}{2025} & -\frac{2}{75} \\ 0 & -\frac{2}{75} & \frac{6}{25} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.22222 & 0.084444 & 0 \\ 0.084444 & 0.59556 & -0.026667 \\ 0 & -0.026667 & 0.24 \end{bmatrix}$$

ve koralasyon matrisi,

$$R=\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\frac{32}{21}}{\sqrt{\frac{2}{9}\times\frac{171}{2025}}} & 0 \\ \dfrac{\frac{32}{21}}{\sqrt{\frac{2}{9}\times\frac{171}{2025}}} & 1 & \dfrac{-\frac{2}{75}}{\sqrt{\frac{171}{2025}\times\frac{6}{25}}} \\ 0 & \dfrac{-\frac{2}{75}}{\sqrt{\frac{171}{2025}\times\frac{6}{25}}} & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0.61644 & 0 \\ 0.61644 & 1 & -0.18732 \\ 0 & -0.18732 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

<u>Tanım 4</u> $(X_1, X_2 ..., X_n)$ bir rasgele vektör olmak üzere (var olması halinde),

$$M_{X_1,X_2...,X_n}(t_1,t_2...,t_n)=E\ e^{t_1X_1+t_2X_2+...+t_nX_n)} \quad , \ -h<t_1,t_2...,t_n<h$$

fonksiyonuna $(X_1, X_2 ..., X_n)$ vektörünün veya $X_1, X_2 ..., X_n$ rasgele değişkenlerinin ortak dağılımının moment çıkaran fonksiyonu denir.

<u>Teorem 2</u> $X_1, X_2 ..., X_n$ rasgele değişkenleri bağımsız olduğunda,

$$E\ g_1(X_1)g_2(X_2)...g_n(X_n)\ =E\ g_1(X_1)\ E\ g_2(X_2)\ ...E\ g_n(X_n)$$

dır.

<u>İspat:</u>

$$E\ g_1(X_1)g_2(X_2)...g_n(X_n)\ =\sum_{x_1}\sum_{x_2}...\sum_{x_n}g_1(x_1)g_2(x_2)...g_n(x_n)f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1,x_2,...,x_n)$$

$$=\sum_{x_1}g_1(x_1)f_{X_1}(x_1)\sum_{x_2}g_2(x_2)f_{X_2}(x_2)....\sum_{x_n}g_n(x_n)f_{X_n}(x_n)$$

$$=E\ g_1(X_1)\ E\ g_2(X_2)\ ...E\ g_n(X_n)$$

Sürekli haldeki ispatta toplamın yerini integral almaktadır.

<u>Sonuç:</u> $X_1, X_2 ..., X_n$ rasgele değişkenleri bağımsız olduğunda,

$$E\left[X_1, X_2 ..., X_n\right] = E\left[X_1\right] E\left[X_2\right] ... E\left[X_n\right]$$

$$Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) = E(X_i)E(X_j) - E(X_i)E(X_j) = 0 \ , \ i \neq j \ , \ \ i, j = 1, 2, ..., n$$

$$\rho_{X_i, X_j} = \frac{Cov(X_i, X_j)}{\sqrt{Var(X_i)Var(X_j)}} = 0 \ , \quad i \neq j \ , \ i, j = 1, 2, ..., n$$

$$M_{X_1, X_2 ..., X_n}(t_1, t_2 ..., t_n) = E\left[e^{t_1 X_1} e^{t_2 X_2} ... e^{t_n X_n}\right] = E\left[e^{t_1 X_1}\right] E\left[e^{t_2 X_2}\right] ... E\left[e^{t_n X_n}\right] = M_{X_1}(t_1) M_{X_2}(t_2) ... M_{X_n}(t_n)$$

dır.

Ortak dağılıma sahip olan X, Y gibi iki rasgele değişken için tanımlanan,

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

korelasyon katsayısına, Pearson korelasyon katsayısı denir. $\rho_{X,Y}$ korelasyon katsayısı X ile Y rasgele değişkenleri arasındaki lineer ilişkinin bir ölçüsüdür. İleride

$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$$

olduğunun ispatını da öğreneceksiniz. $\rho_{X,Y} = 0$ olduğunda X ile Y rasgele değişkenlerine ilişkisizdir denir. $\rho_{X,Y}$ korelasyon katsayısı 1 yakın olduğunda X ile Y arasında güçlü pozitif ilişki, -1 'e yakın olduğunda güçlü negatif ilişki vardır denir. Şimdi, iki rasgele değişkenin bağımsızlığını ve $\rho_{X,Y}$ korelasyon katsayısını örnekler üzerinde irdeleyelim.

Örnek 2 (X, Y) rasgele vektörünün dağılımı, başka bir ifade ile X, Y rasgele değişkenlerinin ortak dağılımı aşağıdaki olasılık tablosu ile verilsin.

$x \setminus y$	0	1	2	$f_X(x)$
0	1/8	1/8	1/8	3/8
1	1/8	0	1/8	2/8
2	1/8	1/8	1/8	3/8
$f_Y(y)$	3/8	2/8	3/8	1

$f_{X,Y}(1,1) = 0$, $f_X(1) = \frac{2}{8}$, $f_Y(1) = \frac{2}{8}$ olmak üzere,

$$f_{X,Y}(1,1) \neq f_X(1) f_Y(1)$$

olduğundan X ile Y bağımsız değildir. Fakat,

$$E(X) = 1 \quad , \quad E(X^2) = \frac{14}{8} \quad , \quad Var(X) = \frac{6}{8}$$

$$E(Y) = 1 \quad , \quad E(Y^2) = \frac{14}{8} \quad , \quad Var(Y) = \frac{6}{8}$$

$$E(XY)=1 \quad , \quad Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

olup,

$$\rho_{X,Y}=0$$

dır. Görüldüğü gibi korelasyon katsayısı $\rho_{X,Y}=0$ olan iki rasgele değişken bağımsız olmayabilir. İki rasgele değişkenin bağımsızlığı ile ilişkisizliği arasında,

$$X \text{ ile } Y \text{ bağımsız} \Rightarrow \rho_{X,Y}=0$$

önermesi doğrudur.

Korelasyon katsayısının büyüklüğünü irdeleyelim

$x \setminus y$	0	1	2	$f_X(x)$
0	3/8	0	0	3/8
1	0	2/8	0	2/8
2	0	0	3/8	3/8
$f_Y(y)$	3/8	2/8	3/8	1

$$E(X)=1 \quad , \quad E(X^2)=\frac{14}{8} \quad , \quad Var(X)=\frac{6}{8}$$

$$E(Y)=1 \quad , \quad E(Y^2)=\frac{14}{8} \quad , \quad Var(Y)=\frac{6}{8}$$

$$E(XY)=\frac{14}{8} \quad , \quad Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{6}{8}$$

olup,

$$\rho_{X,Y}=\frac{\frac{6}{8}}{\sqrt{\frac{6}{8}\times\frac{6}{8}}}=1$$

dır. Görüldüğü gibi, $P(X=Y)=P(X-Y=0)=1$, yani X ile Y arasında tam bir lineer ilişki olmak üzere, korelasyon katsayısı $\rho_{X,Y}=1$ dır. X ile Y rasgele değişkenleri arasında pozitif bir ilişki söz konusudur. Rasgele değişkenlerden biri büyük değer aldığında diğeri de büyük, biri küçük değer aldığında diğeri de küçük değer almaktadır.

$x \setminus y$	0	1	2	$f_X(x)$
0	2/8	1/8	0	3/8
1	1/8	1/8	0	2/8
2	0	0	3/8	3/8
$f_Y(y)$	3/8	2/8	3/8	1

olması durumunda,

$$E(X)=1 \quad , \quad E(X^2)=\frac{14}{8} \quad , \quad Var(X)=\frac{6}{8}$$

$$E(Y)=1 \quad , \quad E(Y^2)=\frac{14}{8} \quad , \quad Var(Y)=\frac{6}{8}$$

$$E(XY)=\frac{13}{8} \quad , \quad Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{5}{8}$$

olup,

$$\rho_{X,Y}=\frac{\frac{5}{8}}{\sqrt{\frac{6}{8}\times\frac{6}{8}}}=\frac{5}{6}\approx 0.83=\%83$$

dır. X ile Y rasgele değişkenleri arasında oldukça güçlü pozitif bir lineer ilişki söz konusudur.

$x \setminus y$	0	1	2	$f_X(x)$
0	0	1/8	2/8	3/8
1	0	1/8	1/8	2/8
2	3/8	0	0	3/8
$f_Y(y)$	3/8	2/8	3/8	1

olması durumunda,

$$E(X)=1 \quad , \quad E(X^2)=\frac{14}{8} \quad , \quad Var(X)=\frac{6}{8}$$

$$E(Y)=1 \quad , \quad E(Y^2)=\frac{14}{8} \quad , \quad Var(Y)=\frac{6}{8}$$

$$E(XY)=\frac{3}{8} \quad , \quad Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{5}{8}$$

olup,

$$\rho_{X,Y}=\frac{-\frac{5}{8}}{\sqrt{\frac{6}{8}\times\frac{6}{8}}}=-\frac{5}{6}\approx -0.83=-\%83$$

dır. X ile Y rasgele değişkenleri arasında oldukça güçlü negatif bir lineer ilişki söz konusudur.

$x \setminus y$	0	1	2	$f_X(x)$
0	0	0	3/8	3/8
1	0	2/8	0	2/8
2	3/8	0	0	3/8
$f_Y(y)$	3/8	2/8	3/8	1

olması durumunda,

$$E(X)=1 \quad , \quad E(X^2)=\frac{14}{8} \quad , \quad Var(X)=\frac{6}{8}$$

$$E(Y)=1 \quad , \quad E(Y^2)=\frac{14}{8} \quad , \quad Var(Y)=\frac{6}{8}$$

$$E(XY)=\frac{2}{8} \quad , \quad Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{6}{8}$$

olup,

$$\rho_{X,Y}=\frac{-\frac{6}{8}}{\sqrt{\frac{6}{8}\times\frac{6}{8}}}=-1$$

dır. X ile Y rasgele değişkenleri arasında tam negatif bir lineer ilişki söz konusudur.

$x \setminus y$	0	1	2	$f_X(x)$
0	1/8	1/8	1/8	3/8
1	0	1/8	1/8	2/8
2	2/8	0	1/8	3/8
$f_Y(y)$	3/8	2/8	3/8	1

olması durumunda,

$$E(X)=1 \quad , \quad E(X^2)=\frac{14}{8} \quad , \quad Var(X)=\frac{6}{8}$$

$$E(Y)=1 \quad , \quad E(Y^2)=\frac{14}{8} \quad , \quad Var(Y)=\frac{6}{8}$$

$$E(XY)=\frac{7}{8} \quad , \quad Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{1}{8}$$

olup,

$$\rho_{X,Y}=\frac{-\frac{2}{8}}{\sqrt{\frac{6}{8}\times\frac{6}{8}}}=-\frac{1}{3}\approx -0.33\text{=-\%33}$$

dır. X ile Y rasgele değişkenleri arasında zayıf, negatif bir lineer ilişki söz konusudur.

Marjinal dağılımları aynı olan yukarıdaki olasılık dağılımlarını, korelasyon katsayıları ile birlikte bir kez daha göz önüne alalım.

$x \setminus y$	**0**	**1**	**2**
0	3/8	0	0
1	0	2/8	0
2	0	0	3/8

$\rho_{X,Y}=1$

$x \setminus y$	**0**	**1**	**2**
0	0	0	3/8
1	0	2/8	0
2	3/8	0	0

$\rho_{X,Y}=-1$

$x \setminus y$	**0**	**1**	**2**
0	2/8	1/8	0
1	1/8	1/8	0
2	0	0	3/8

$\rho_{X,Y}=\%83$

$x \setminus y$	**0**	**1**	**2**
0	0	1/8	2/8
1	0	1/8	1/8

2	3/8	0	0	$\rho_{X,Y} = -\%83$

$x \diagdown y$	**0**	**1**	**2**
0	1/8	1/8	1/8
1	0	1/8	1/8
2	2/8	0	1/8

$\rho_{X,Y}$=-%33

$x \diagdown y$	**0**	**1**	**2**
0	1/8	1/8	1/8
1	1/8	0	1/8
2	1/8	1/8	1/8

$\rho_{X,Y}$=0

ve

$x \diagdown y$	**0**	**1**	**2**	$f_X(x)$
0	9/64	6/64	9/64	3/8
1	6/64	4/64	6/64	2/8
2	9/64	6/64	9/64	3/8
$f_Y(y)$	3/8	2/8	3/8	1

olması durumunda X ile Y rasgele değişkenleri bağımsız (ortak olasılıklar marjinallerin çarpımı) olduğundan $\rho_{X,Y}$=0 dır.

<u>**Örnek 3**</u> (X,Y,Z) rasgele vektörünün olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \begin{cases} (x+y)e^{-z} & , \quad 0<x<1\,,\, 0<y<1\ ,\ z>0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olsun. ve (X,Y,Z) vektörünün varyans-kovaryans matrisi ile korelasyon matrisini bulalım.

X ‘in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_X(x) = \int_0^1 \int_0^\infty (x+y)e^{-z}dydz$$

$$= \int_0^1 (x+y)dy \int_0^\infty e^{-z}dz = \int_0^1 (x+y)dy = \left.\frac{(x+y)^2}{2}\right|_{y=0}^{1} = y + \frac{1}{2} \quad , \quad 0<y<1$$

ve

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_0^1 x(x+\frac{1}{2})dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\right)_{x=0}^{1} = \frac{7}{12}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx=\int_0^1 x^2(x+\frac{1}{2})dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^1=\frac{5}{12}$$

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{5}{12}-(\frac{7}{12})^2=\frac{11}{144}$$

dır.

Y ‘nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_Y(y)=\int_0^1\int_0^{\infty}(x+y)e^{-z}dxdz$$

$$=\int_0^1(x+y)dy\int_0^{\infty}e^{-z}dz=\int_0^1(x+y)dx=\frac{(x+y)^2}{2}\Big|_{x=0}^1=y+\frac{1}{2} \quad , \quad 0<x<1$$

ve

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy=\int_0^1 y(y+\frac{1}{2})dy=\left(\frac{y^3}{3}+\frac{1}{2}\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^1=\frac{7}{12}$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)dy=\int_0^1 y^2(y+\frac{1}{2})dy=\left(\frac{y^4}{4}+\frac{1}{2}\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^1=\frac{5}{12}$$

$$Var(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{5}{12}-(\frac{7}{12})^2=\frac{11}{144}$$

dır.

Z ‘nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_Z(z)=\int_0^1\int_0^1(x+y)e^{-z}dxdy=e^{-z}\int_0^1\int_0^1(x+y)dxdy$$

$$=e^{-z}\int_0^1\left(\frac{(x+y)^2}{2}\Big|_{x=0}^1\right)dy==e^{-z}\int_0^1\left(y+\frac{1}{2}\right)dy=e^{-z} \quad , \; z>0$$

olup, Z rasgele değişkeni $\theta=1$ parametreli üstel dağılıma sahiptir ve

$$E(Z)=1$$
$$Var(Z)=1$$

dır.

X ile Y nin ortak marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X,Y}(x,y)=\int_0^{\infty}(x+y)e^{-z}dz=x+y \quad , \quad 0<x<1\,,\,0<y<1$$

olmak üzere,

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = f_{X,Y}(x,y)\, f_Z(z)$$

dır. Z rasgele değişkeni X ile Y rasgele değişkenlerinden bağımsızdır. Buna göre,

$$Cov(X,Z) = 0$$
$$Cov(Y,Z) = 0$$

dır.

$Cov(X,Y)$ hesabına gelince,

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dxdy = \int_0^1 y\left((\frac{x^2}{3} + y\frac{x^2}{2})\Big|_{x=0}^{1} \right) dy \\
&= \int_0^1 y\left(\frac{1}{3} + \frac{y}{2}\right) dy = (\frac{y^2}{6} + \frac{y^3}{6})\Big|_{y=0}^{1} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$Cov(XY) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{3} - \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} = -\frac{1}{48}$$

dır.

(X,Y,Z) rasgele vektörünün varyans-kovaryans matrisi

$$\Sigma = \begin{bmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) & Cov(X,Z) \\ Cov(Y,X) & Var(Y) & Cov(Y,Z) \\ Cov(Z,X) & Cov(Z,Y) & Var(Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{144} & \frac{-1}{48} & 0 \\ \frac{-1}{48} & \frac{11}{144} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{25} \end{bmatrix}$$

ve koralasyon matrisi,

$$R=\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\frac{-1}{48}}{\sqrt{\frac{11}{144}\times\frac{11}{144}}} & 0 \\ \dfrac{\frac{-1}{48}}{\sqrt{\frac{11}{144}\times\frac{11}{144}}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.27273 & 0 \\ -0.27273 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3 $X_1, X_2 ..., X_n$ rasgele değişkenlerin beklenen değerleri ve kovaryansları mevcut olsun. $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

a) $E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$

b) $Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j Cov(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$

dır.

İspat: (Ödev)

Sonuç 1: $X_1, X_2 ..., X_n$ rasgele değişkenleri bağımsız olduğunda,

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

dır.

Sonuç 2: X_1, X_2 rasgele değişkenleri bağımsız olduğunda,

$$Var(X_1 \pm X_2) = Var(X_1) + Var(X_2)$$

dır.