Bazı Kesikli Olasılık Dağılımları

Hatırlatma: (Ω, U, P) bir olasılık uzayı ve

$$\begin{aligned} X: \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow X(\omega) \end{aligned}$$

olmak üzere, $\forall \;\; a \in R$ için,

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \in U$$

oluyorsa X fonksiyonuna bir **Rasgele Değişken** denir.

$$D_X = X(\Omega) = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ , } \exists \omega \in \Omega \text{ için } X(\omega) = x\}$$

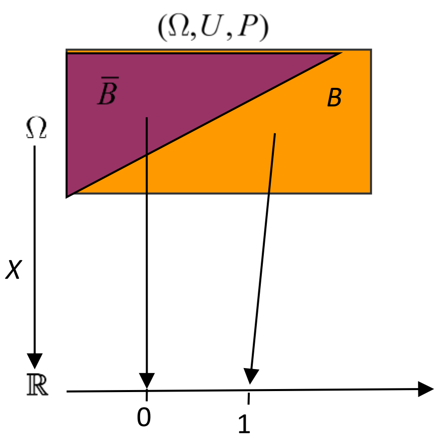
olmak üzere, D_X kümesi sonlu veya sayılabilir sonsuz elemanlı olduğunda X e kesikli rasgele değişken (discrete random variable) denir. Bu ders döneminde kesikli dağılımlardan sırasıyla Bernoulli, Binom, Hipergeometrik, Geometrik, Negatif Binom (Pascal), Poisson ve Düzgün Dağılımı göreceğiz.

Bernoulli Dağılımı

Bir deneydeki sonuçlar başarı ya da başarısızlık olarak nitelendirildiğinde, böyle deneylere iki tür sonuçlu deney, Bernoulli deneyi veya Bernoulli denemesi denir. Bu deneylerde,

$$\Omega = B \cup \overline{B}$$
$$U = \varnothing, \Omega, B, \overline{B}$$
$$P(B) = p$$

olmak üzere, B olayına başarı elde etme olayı ve p olasılığına başarı olasılığı ve $0 < p < 1$ için $q = 1 - p = P(\overline{B})$ olasılığına başarısızlık olasılı denir. Aşağıdaki gibi tanımlanan X rasgele değişkenine Bernoulli rasgele değişkeni ve dağılımına da Bernoulli dağılımı denir.



X rasgele değişkeninin aldığı değerler 0,1 olup $D_X = \{0,1\}$ dır. X in olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = p^x (1-p)^{1-x} \text{ , } x = 0,1$$

olasılık tablosu,

x	0	1
$f(x) = P(X = x)$	q	p

dağılım fonksiyonu,

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<0 \\ q & , \quad 0\le x<1 \\ 1 & , \quad x\ge 1\end{cases}$$

ve

$$E(X)=\sum x.f(x)=0.q+1.p=p$$
$$E(X^2)=\sum x^2.f(x)=0^2.q+1^2.p$$
$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=p-p^2=p(1-p)=p.q$$
$$M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_x e^{tx}f(x)=e^{t.0}.q+e^{t.1}.p=q+p.e^t=1-p+p.e^t$$

dır. Bernoulli dağılımında, beklenen değer başarı elde etme olasılığına eşittir.

Bernoulli dağılımındaki p $(0<p<1)$ sayısına dağılımın parametresi denir. Bernoulli dağılımları arasında varyansı en büyük olan dağılım hangisidir ? Bernoulli Dağılımının varyansı p 'nin bir fonksiyonudur.

$$g(p)=pq=p(1-p)=p-p^2 \quad , \quad 0<p<1$$
$$g'(p)=1-2p$$
$$g''(p)=-2$$

olmak üzere, $p=\frac{1}{2}$ olan Bernoulli dağılımının varyansı en büyüktür. Parametresi ½ olan Bernoulli dağılımı en büyük varyanslıdır.

Bernoulli dağılımını iki tür sonuçlu deneylerinin modellenmesinde (anlatımında) kullanırız. Örneğin 200 kişilik bir kitlede 120 kişi sigara içmiyor ve 80 kişi içiyor, yani %60'ı sigara içmiyor olsun. Bu kitleden rasgele bir kişi seçildiğinde Örnek Uzay,

$$\Omega = \text{ sigara içiyor, sigara içmiyor}$$

olmak üzere, seçilen kişinin sigara içmiyor olması olayının olasılığı p=0.6 olup, X rasgele değişkeni sigara içmeyen için 1, içen için 0 değerini alsın. X bir Bernoulli rasgele değişkenidir.

Bir olayın olasılığı p olmak üzere, $\frac{p}{1-p}$ sayısına, bu olayın değiline göre karşıtlığı diyelim. Kısaca $\frac{p}{1-p}$ sayısına karşıtlık (odds) diyelim. (Odds: the ratio of the probability of one event to that of an alternative event.) Karşıtlık $(0,\infty)$ aralığında bir sayıdır. Yukarıda sözü edilen kitlede, sigara içmemenin içmeye karşıtlığı $\frac{0.60}{1-0.60}=1.5=\frac{120}{80}=120:80=3:2$ dır. Sigara içmeyen 3 kişiye karşılık 2 kişi sigara içmektedir. Ölümcül bir tür kanser tedavisinde %80 olasılıkla başarı elde ediliyorsa,

$$Karşıtlık=\frac{0.80}{1-0.80}=4:1$$

dır.

Bir olay için karşıtlık $\frac{p_1}{1-p_1}$ ve başka bir olay için karşıtlık $\frac{p_2}{1-p_2}$ olmak üzere, bu iki olay için

$$Karşıtlık\ Oranı\ (Odds\ Ratio, OR) = \frac{\dfrac{p_1}{1-p_1}}{\dfrac{p_2}{1-p_2}} = \frac{p_1(1-p_2)}{p_2(1-p_1)}$$

olarak tanımlanmaktadır. Ölümcül bir tür kanser tedavisinde başarı olasılığı, bayanlar için p_1 =%80, erkekler için p_2 =%40 olduğunda, bir bayanın kurtulma olasılığı erkeğin iki katıdır. Bayanlar için

$$Karşıtlık_B = \frac{p_1}{1-p_1} = \frac{0.80}{1-0.80} = \frac{4}{1} = 4$$

olmak üzere, 4 kurtulan bayana karşılık 1 bayan ölmektedir. Erkekler için,

$$Karşıtlık_E = \frac{p_2}{1-p_2} = \frac{0.40}{1-0.40} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

olup, 4 kurtulan erkeğe karşılık 6 erkek ölmektedir. Bu karşıtlıkların oranı,

$$OR = \frac{\dfrac{p_1}{1-p_1}}{\dfrac{p_2}{1-p_2}} = \frac{\dfrac{0.80}{1-0.80}}{\dfrac{0.40}{1-0.40}} = \frac{\dfrac{4}{1}}{\dfrac{4}{6}} = 6$$

dır. Tedavi sonrası bir bayanın kurtulma olasılığı erkeğin kurtulma olasılığının iki katı, Karşıtlık Oranı ise OR=6 dır.

Bir tedavide başarı oranı (olasılığı), sigara içme oranı, bozuk ürünlerin oranı, 80 yaşın üzerindekilerin oranı, kısaca bir kitlede belli bir özelliğe sahip nesnelerin oranı kitleyi karakterize etmede önemli parametrelerden birisidir. Ayrıca bu parametreye bağlı olarak Karşıtlık ve Karşıtlık Oranı gibi kavramlar söz konusudur. Bir kitlede belli bir özelliğe sahip nesnelerin oranı, bir Bernoulli denemesinde başarı olasılığı p ($0 < p < 1$) olmak üzere, p parametresi bilinmediğinde tahmin edilmesi gerekmaktadir. Bernoulli Dağılımının p parametresinin tahmin edilmesi problemini bu dersin sonunda ve önümüzdeki derste ele alacağız.

Binom Dağılımı

Başarı olasılığı p olan bir Bernoulli denemesinin aynı şartlar altında, bağımsız olarak n kez tekrarlanmasıyla oluşan deneye Binom Deneyi denir.

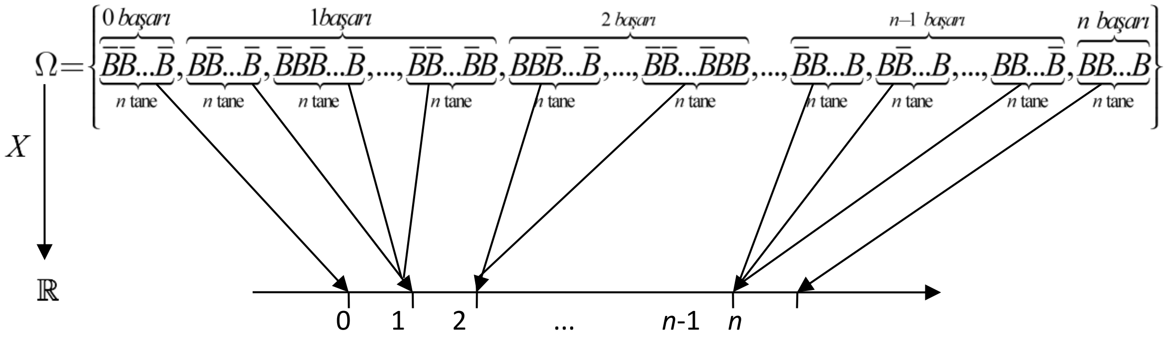
1. Tura gelmesi başarı sayılan bir para atışının 10 kez tekrarlanması,
2. Kusursuz parça üretme olasılığı $p = 0.99$ olan bir makinada 10 tane parça üretilmesi,
3. Bir atışta başarı olasılığı $p = 0.80$ olan bir basketbolcunun 5 atış yapması,
4. 6 Kırmızı ve 4 siyah top içeren bir kavanozdan iadeli olarak 3 top çekilmesi,

birer Binom Deneyidir.

Binom Deneyinde örnek uzay,

$$\Omega=\left\{\underbrace{BB...B}_{n \text{ tane}},\underbrace{\bar{B}B...B}_{n \text{ tane}},\underbrace{B\bar{B}B...B}_{n \text{ tane}},...,\underbrace{BB...\bar{B}}_{n \text{ tane}},\underbrace{\bar{B}\bar{B}...B}_{n \text{ tane}},...\underbrace{BB...B\bar{B}\bar{B}}_{n \text{ tane}},\underbrace{\bar{B}\bar{B}\bar{B}B...B}_{n \text{ tane}},...,\underbrace{BB...B\bar{B}\bar{B}\bar{B}}_{n \text{ tane}},...,\underbrace{\bar{B}\bar{B}...\bar{B}}_{n \text{ tane}}\right\}$$

olmak üzere, X rasgele değişkeni n denemede elde edilen başarı sayısı olsun.



X rasgele değişkeninin aldığı değerlerin kümesi,

$$D_X=\{0,1,2,...,n-1,n\}$$

ve

$$P(X=0)=P(\underbrace{\bar{B}\bar{B}...\bar{B}}_{n \text{ tane}})=\underbrace{qq...q}_{n \text{ tane}}=q^n$$

$$P(X=1)=P(\underbrace{B\bar{B}...\bar{B}}_{n \text{ tane}} \ veya \ \underbrace{\bar{B}B\bar{B}...\bar{B}}_{n \text{ tane}} \ veya ... \ veya \ \underbrace{\bar{B}\bar{B}...\bar{B}B}_{n \text{ tane}})=nq^{n-1}p=\binom{n}{1}p^1q^{n-1}$$

$$P(X=2)=P(\underbrace{BB\bar{B}...\bar{B}}_{n \text{ tane}} \ veya ... \ vaya \ \underbrace{\bar{B}\bar{B}...\bar{B}BB}_{n \text{ tane}})=\binom{n}{2}p^2q^{n-2}$$

...

$$P(X=n)=P(\underbrace{BB...B}_{n \text{ tane}})=p^n$$

olup, X in olasılık fonksiyonu,

$$f(x)=\binom{n}{x}p^xq^{n-x} \quad , \quad x=0,1,...,n$$

dır. Moment çıkaran fonksiyon,

$$\begin{aligned} M_X(t)=E\left(e^{tX}\right)&=\sum_{x=0}^{n}e^{tx}f(x) \\ &=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\left(pe^t\right)^x q^{n-x} \\ &=\left(q+pe^t\right)^n \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$E(X)=\left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0}=n\left(q+pe^t\right)^{n-1}pe^t\Big|_{t=0}=np$$

$$E\left(X^2\right)=\left.\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0}=n(n-1)\left(q+pe^t\right)^{n-2}\left(pe^t\right)^2+n\left(q+pe^t\right)^{n-1}pe^t\Big|_{t=0}$$

$$=n(n-1)p^2+np$$

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=n(n-1)p^2+np-(np)^2$$

$$=-np^2+np=np(1-p)=npq$$

dır.

Başarı olasılığı p olan bir Bernoulli denemesinin aynı şartlar altında, bağımsız olarak n kez tekrarlanması deneyinde, yani bir Binom Deneyinde elde edilen başarı sayısı X rasgele değişkeni olmak üzere, X e Binom Dağılımına sahiptir denir ve $X \sim b(n,p)$ biçiminde gösterilir. $n=1$ için Binom Dağılımı bir Bernoulli dağılımıdır. Bernoulli Dağılımını $b(1,p)$ biçiminde gösterebiliriz.

Binom Dağılımında iki parametre bulunmaktadır. Birisi n ($n \in \mathbb{Z}^+ = 1,2,3,...$, diğeri p $p \in 0,1 \subset \mathbb{R}$ dir. Bu parametreleri bildiğimiz zaman, Binom Dağılımına sahip bir X rasgele değişkeni ile ilgili olasılık, beklenen değer, varyans ve başka hesaplamalar yapabiliriz. Binom Dağılımında parametre tahmini konusunu burada ele almayacağız. Parametre tahmini konusuna bu ders yılı içinde sıkça değineceğiz, ancak parametre tahminini Lisans Eğitimi düzeyinde İST202 dersinde göreceksiniz. $n=1$ için Binom Dağılımı bir Bernoulli dağılımıdır. Bernoulli Dağılımını $b(1,p)$ biçiminde gösterebiliriz.

Örnek 1 Düzgün bir paranın üç kez atılışında örnek uzay,

$$\Omega=\{YYY,YYT,YTY,TYY,YTT,TYT,TTY,TTT\}$$

olmak üzere, X rasgele değişkeni üç atışta gelen turaların sayısı olsun. Böyle tanımlanan X rasgele değişkeni $n=3$ ve $p=\frac{1}{2}$ olan Binom Dağılımına sahiptir, yani $X \sim b(n=3,p=\frac{1}{2})$ dır. X rasgele değişkenin aldığı değerlerin kümesi,

$$D_X=X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$$

olmak üzere, X in olasılık fonksiyonu,

$$f(x)=\binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}\quad,\ x=0,1,2,3$$

ve olasılık tablosu

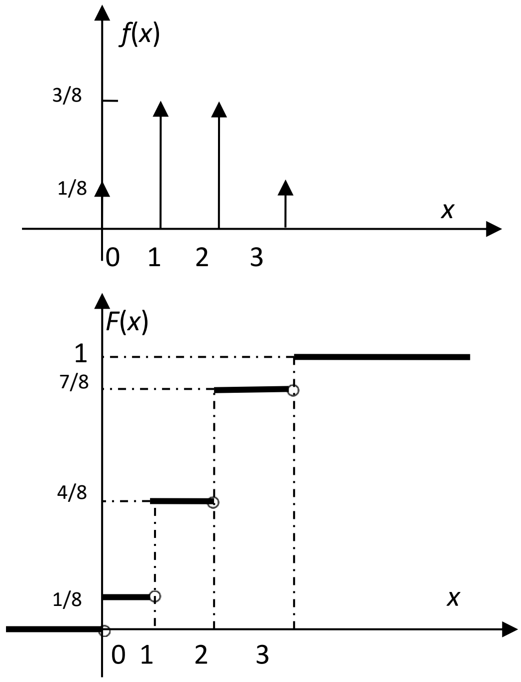
x	0	1	2	3
$f(x)=P(X=x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

dır. X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu,

$$F:\mathbb{R}\to[0,1]$$

$$x\to F(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0 & , \quad x<0\\ \frac{1}{8} & , \quad 0\le x<1\\ \frac{4}{8} & , \quad 1\le x<2\\ \frac{7}{8} & , \quad 2\le x<3\\ 1 & , \quad x\ge 3\end{cases}$$

dır. Olasılık fonksiyonu ile dağılım fonksiyonunun grafikleri,



ve

$$E(X)=np=\frac{3}{2}=1.5$$

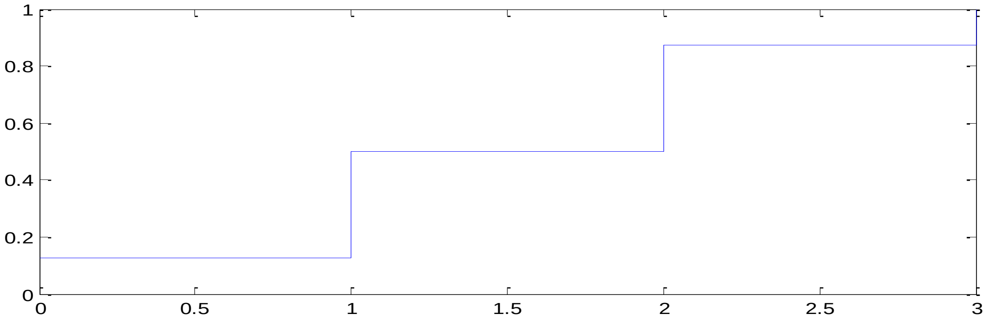
$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=npq=\frac{3}{4}=0.75$$

dır.

Bir torbada eşit sayıda beyaz ve kırmızı top bulunsun. Çekileni yine torbaya atarak ardı ardına üç top çekilmesi deneyinde gelen beyaz topların sayısı X rasgele değişkeni olsun. $X\sim b(n=3,p=\frac{1}{2})$ dır.

Aşağıdaki Matlab programını gözden geçiriniz.

```
>>x=0:3
x =     0              1                  2          3
>> binopdf(x,3,1/2)
ans =
      0.125       0.375       0.375       0.125
>> binocdf(x,3,1/2)
ans =
      0.125        0.5        0.875          1
>> stairs(x,ans)
```



Örnek 2 Bir torna makinası bir günde 5 parça işlemektedir. Bir parçayı kusursuz olarak işlemesi olasılığının $p=\dfrac{4}{5}$ olduğu bilinsin. Bir günde kusursuz olarak işlenen parça sayısı X rasgele değişkeni olsun. $X \sim b(n=5, p=\dfrac{4}{5})$ dağılımına sahiptir. X in olasılık fonksiyonu,

$$f(x)=\binom{5}{x}\left(\frac{4}{5}\right)^{x}\left(\frac{1}{5}\right)^{5-x}, \quad x=0,1,2,3,4,5$$

olasılık tablosu,

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)=\binom{5}{x}\left(\frac{4}{5}\right)^{x}\left(\frac{1}{5}\right)^{5-x}$	$\frac{1}{3125}$	$\frac{20}{3125}$	$\frac{160}{3125}$	$\frac{640}{3125}$	$\frac{1280}{3125}$	$\frac{1024}{3125}$

```
>> x=0:5
x =                          0            1            2              3            4             5
>> binopdf(x,5,4/5)
                        0.00032      0.0064      0.0512      0.2048      0.4096      0.32768
```

ve $E(X)=np=4$, $Var(X)=npq=\dfrac{4}{5}=0.8$ dır.

İşlenmemiş parçanın alış değeri a=100 TL, işleme masrafı b=100 TL, kusurlu işlenmiş parçanın hurda değeri c=10 TL ve kusursuz işlenmiş parçanın satış değeri d =310 TL olduğunda,

$$K=5(c-a-b)+(d-c)X=-950+300X$$
$$E(K)=-950+300E(X)=-950+300\times 4=250$$
$$Var(X)=300^{2}Var(X)=300^{2}\times\frac{4}{5}=72000$$
$$\sigma_X=\sqrt{72000}=268.3$$

dır. Günlük kazancın beklenen değeri 250 TL dir. Günlük kazancın olasılık dağılımı,

x	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	$\frac{1}{3125}$	$\frac{20}{3125}$	$\frac{160}{3125}$	$\frac{640}{3125}$	$\frac{1280}{3125}$	$\frac{1024}{3125}$
$k=-950+300x$	-950	-650	-350	-50	250	550
$P(K=k)$	$\frac{1}{3125}$	$\frac{20}{3125}$	$\frac{160}{3125}$	$\frac{640}{3125}$	$\frac{1280}{3125}$	$\frac{1024}{3125}$

olmak üzere, bazı günlerde 550 TL kazanç olduğu gibi, 950, 650 ya da 350 TL kayıp söz konusu olabilir.

Örnek 3 5 seçenekli 20 soruluk bir test sınavında sorular rasgele işaretlendiğinde,

a) En az 10 doğru cevap tutturma olasılığı nedir?

b) Tutturulan doğru cevap sayısının beklenen değeri nedir?

c) Her doğru cevap için 1 ve 4 yanlış cevap için -1 puan verildiğinde 20 soru için beklenen puan nedir?

X-rasgele değişkeni işaretlenen 20 sorudan doğru cevaplananların sayısı olsun.

$$X \sim \text{b(n=20, p} = \frac{1}{5})$$

$$f(x) = \binom{20}{x}\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{20-x}, \quad x = 0,1,2,\ldots,20$$

$$E(X) = np = 4$$

$$Var(X) = npq = \frac{80}{25} = 3.2$$

olmak üzere,

a) $P(X \geq 10) = \sum_{x=10}^{20} f(x) = \sum_{x=10}^{20}\binom{20}{x}\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{20-x} = 0.0025948$

Matlab kodu:

```
>>x=10:20;
>>sum(binopdf(x,20,1/5))
ans = 0.0025948
```

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - F(9) = 0.0025948$$

```
>> 1-binocdf(9,20,1/5)
ans = 0.0025948
```

b) $E(X) = np = 4$

c) *K* rasgele değişkeni 20 sorudan elde edilen puanı göstersin.

$$K = 1\times X - 1/4\times(20 - X) = \frac{5}{4}X - 5$$

ve

$$E(K) = \frac{5}{4}E(X) - 5 = \frac{5}{4}\times 4 - 5 = 0$$

dır.

Örnek 4 4 çocuklu bir ailede kız çocukların sayısı *X* rasgele değişkeni olsun.

$$X \sim b(n=4, p=\frac{1}{2})$$

olmak üzere,

$$f(x) = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{4-x} = \frac{1}{16}\binom{4}{x} \quad , \quad x = 0,1,2,3,4$$

dır. Olasılık tablosu,

x	0	1	2	3	4
$f(x) = \frac{1}{16}\binom{4}{x}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

ve

$$E(X) = np = 2 \quad , \quad Var(X) = npq = 1$$

dır. 4'er çocuklu 160 ailenin kız çocuk sayısı bakımından dağılışı ne olur?

kız çocukların sayısı	aile sayısı (teorik sıklık , frekans)
0	$10 = 160\times P(X=0)$
1	$40 = 160\times P(X=1)$
2	$60 = 160\times P(X=2)$
3	$40 = 160\times P(X=3)$
4	$10 = 160\times P(X=4)$
	160

Örnek 5 3 beyaz ve 2 siyah top bulunan bir kavanozdan iadeli olarak 10 kez top çekildiğinde,

a) Gelen siyah topların sayısının beyazlardan çok olması olasılığı nedir?

b) Siyah topların beklenen sayısı nedir?

c) Siyah top için 100 TL kazanılsa, beyaz top için 50 TL kaybedilse, böyle bir oyunda kazancın beklenen değeri nedir?

X-rasgele değişkeni 10 çekilişte gelen beyaz topların sayısı olsun.

$$X \sim b(n{=}10,\ p=\frac{3}{5})$$

$$f(x)=\binom{10}{x}\left(\frac{3}{5}\right)^{x}\left(\frac{2}{5}\right)^{10-x}, \quad x=0,1,2,\ldots,10$$

$$E(X)=np=6$$

$$Var(X)=npq=2.4$$

```
>>x=0:10
>> binopdf(x,10,3/5)
ans =
0.00010486   0.0015729   0.010617   0.042467   0.11148   0.20066   0.25082   0.21499   0.12093   0.040311   0.0060466
```

olmak üzere,

a) $P(X<5)=P(X\le 4)=\sum_{x=0}^{4}\binom{10}{x}\left(\frac{3}{5}\right)^{x}\left(\frac{2}{5}\right)^{10-x}$

= 0.00010486+0.0015729+0.010617+0.042467+0.11148

=0.16624

```
>>x=0:4;
>> sum(binopdf(x,10,3/5))
ans =
    0.16624
```

$$P(X<5)=P(X\le 4)=F(4)=\sum_{x=0}^{4}\binom{10}{x}\left(\frac{3}{5}\right)^{x}\left(\frac{2}{5}\right)^{10-x} = 0.16624$$

```
>> binocdf(4,10,3/5)
ans =
    0.16624
```

b) $E(X)=np=6$

c) K rasgele değişkeni kazanç olsun.

$$K=-50X+100(10-X)=-150X+1000$$

ve

$$E(K)=-150E(X)+1000=100$$

dır.

Hatırlatma: x pozitif tamsayı olsun. $a\in\mathbb{R}$ için

$$\binom{a}{x}=\frac{a(a\text{-}1)(a\text{-}2)\ldots[a-(x-1)]}{1.2.3\ldots x}$$

$$\binom{9}{4}=\frac{9\times8\times7\times6}{1\times2\times3\times4}$$

$$\binom{7.3}{4}=\frac{7.3\times6.3\times5.3\times4.3}{1\times2\times3\times4}$$

$$\binom{2}{4}=\frac{2\times1\times0\times(\text{-}1)}{1\times2\times3\times4}=0$$

$$\binom{2.1}{4}=\frac{2.1\times1.1\times(-0.1)\times(-1.1)}{1\times2\times3\times4}$$

$$\binom{-2}{4}=\frac{(-2)\times(-3)\times(-4)\times(-5)}{1\times2\times3\times4}$$

$$\binom{a}{0}=1$$

dır.

Hipergeometrik Dağılım

N tane nesneden a tanesi belli özelliğe sahip olsun. Bu nesnelerden iadesiz olarak ardı ardına n kez birer nesne çekilmesi veya aynı anda n tane nesne çekilmesi deneyini göz önüne alalım. X rasgele değişkeni çekilen n nesne arasında belli özelliğe sahip olanların sayısı olsun.

$$f(x)=\frac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}}\quad,\quad\begin{cases}x=0,1,2,\ldots,n & (n<N-a\ ,\ n\le a)\\ x=n-(N-a),n-(N-a)+1,\ldots,n & (n\ge N-a\ ,\ n\le a)\\ x=0,1,2,\ldots,a & (n<N-a\ ,\ n>a)\\ x=n-(N-a),n-(N-a)+1,\ldots,a & (n\ge N-a\ ,\ n>a)\end{cases}$$

olmak üzere, X Hipergeometrik Dağılıma sahiptir denir.

Not: $\sum_{x=0}^{n}\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}=\binom{N}{n}$ dır.

Örneğin,

$$\sum_{x=0}^{4}\binom{6}{x}\binom{15-6}{4-x}=\binom{6}{0}\binom{9}{4}+\binom{6}{1}\binom{9}{3}+\binom{6}{2}\binom{9}{2}+\binom{6}{3}\binom{9}{1}+\binom{6}{3}\binom{9}{1}+\binom{6}{4}\binom{9}{0}=\binom{15}{4}$$

$$\binom{8}{0}\binom{4}{2}+\binom{8}{1}\binom{4}{1}+\binom{8}{2}\binom{4}{0}=\binom{12}{2}$$

dır.

$$E(X)=\sum_{x=0}^{n} xf(x)=\sum_{x=0}^{n}\frac{x\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$=\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{x=1}^{n} x\frac{a!}{x!(a-x)!}\binom{N-a}{n-x}$$

$$=\frac{a}{\binom{N}{n}}\sum_{x=1}^{n} x\frac{(a-1)!}{(x-1)!(a-1-x+1)!}\binom{N-a}{n-x}$$

$$=\frac{a}{\binom{N}{n}}\sum_{x=1}^{n}\binom{a-1}{x-1}\binom{N-a}{n-x}$$

($x-1=y$ denilsin)

$$=\frac{a}{\binom{N}{n}}\sum_{y=0}^{n-1}\binom{a-1}{y}\binom{N-1-(a-1)}{n-1-y}$$

$$=\frac{a}{\binom{N}{n}}\binom{N-1}{n-1}$$

$$=\frac{a}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}\frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}$$

$$=\frac{a.n}{N}=n.\frac{a}{N}$$

$Var(X)$ bulmak için önce $E\left[X(X-1)\right]$ değeri bulunsun.

$$E\left[X(X-1)\right]=\sum_{x=0}^{n} x(x-1)\frac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$=\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{x=2}^{n} x(x-1)\frac{a!}{x!(a-x)!}\binom{N-a}{n-x}$$

$$=\frac{a(a-1)}{\binom{N}{n}}\sum_{x=2}^{n}\frac{(a-2)!}{(x-2)!(a-x)!}\binom{N-a}{n-x}$$

$$=\frac{a(a-1)n(n-1)}{N(N-1)}$$

$$=\frac{a(a-1)}{\binom{N}{n}}\sum_{x=2}^{n}\binom{a-2}{x-2}\binom{N-a}{n-x}$$

$x-2=y$ denilsin.

$$=\frac{a(a-1)}{\binom{N}{n}}\sum_{x=2}^{n-2}\binom{a-2}{y}\binom{N-2-(a-2)}{n-2-y}$$

$$=\frac{a(a-1)}{\binom{N}{n}}\binom{N-2}{n-2}$$

$$=\frac{a(a-1)}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}\frac{(N-2)!}{(n-2)!(N-n)!}$$

$$E\left[X(X-1)\right]=E\left(X^2\right)-E(X)=\frac{a(a-1)n(n-1)}{N(N-1)}$$

$$E\left(X^2\right)=\frac{a(a-1)n(n-1)}{N(N-1)}-n\frac{a}{N}$$

$$Var(X)=E\left(X^2\right)-(E(X))^2=\frac{a(a-1)n(n-1)}{N(N-1)}-n\frac{a}{N}-\left(n\frac{a}{N}\right)^2$$

$$=\frac{an(N-a)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

$$=\frac{N-n}{N-1}n\frac{a}{N}\frac{N-a}{N}$$

$$Var(X)=\frac{N-n}{N-1}n\frac{a}{N}\left(1-\frac{a}{N}\right)$$

Hipergeometrik Dağılımda üç tane parametre bulunmaktadır. Bunlar N, a ve n dir. Bu parametreleri bildiğimiz zaman, Hipergeometrik Dağılıma sahip bir X rasgele değişkeni ile ilgili olasılık, beklenen değer, varyans ve başka hesaplamalar yapabiliriz.

Örnek 1 Bir torbadaki 10 toptan 6 tanesi beyaz olsun. Aynı anda 5 top (iadesiz olarak ardı ardına 5 kez birer top) çekilmesi deneyinde gelen beyaz topların sayısı X rasgele değişkeni olsun. N =10, a=6 , $N-a$ =4 , n=5 olmak üzere, X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$f(x)=\frac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{6}{x}\binom{4}{5-x}}{\binom{10}{5}} \quad , \quad x=1,2,3,4,5$$

ve olasılık tablosu,

x	1	2	3	4	5
$f(x)=\frac{\binom{6}{x}\binom{4}{5-x}}{\binom{10}{5}}$	$\frac{\binom{6}{1}\binom{4}{4}}{\binom{10}{5}}=\frac{6}{252}$	$\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{3}}{\binom{10}{5}}=\frac{60}{252}$	$\frac{\binom{6}{3}\binom{4}{2}}{\binom{10}{5}}=\frac{120}{252}$	$\frac{\binom{6}{4}\binom{4}{1}}{\binom{10}{5}}=\frac{60}{252}$	$\frac{\binom{6}{5}\binom{4}{0}}{\binom{10}{5}}=\frac{6}{252}$

dır.

Matlab hesaplaması:

```
>> x=1:5
x =          1         2         3         4         5
>> hygepdf(x,10,6,5)
ans =        0.02381   0.2381    0.47619   0.2381    0.02381
```

$$E(X)=\frac{an}{N}=n\times\frac{a}{N}=5\times\frac{6}{10}=3$$

$$Var(X)=\frac{N-n}{N-1}n\frac{a}{N}\left(1-\frac{a}{N}\right)=\frac{10-5}{10-1}\times5\times\frac{6}{10}\times(1-\frac{6}{10})=\frac{2}{3}$$

<u>Örnek 2</u> Bir iş yerinde 8 kadın ve 2 erkek çalışmaktadır. Rasgele seçilen 3 kişi arasında erkeklerin sayısı X rasgele değişkeni olsun. N =10, a=2 , $N-a$ =8 , n=3 olmak üzere, X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$f(x)=\frac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{2}{x}\binom{8}{2-x}}{\binom{10}{3}} \quad , \quad x=0,1,2$$

olasılık tablosu,

x	0	1	2
$f(x)=\dfrac{\binom{2}{x}\binom{8}{2-x}}{\binom{10}{3}}$	$\dfrac{\binom{2}{0}\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}}=\dfrac{56}{120}$	$\dfrac{\binom{2}{1}\binom{8}{2}}{\binom{10}{3}}=\dfrac{56}{120}$	$\dfrac{\binom{2}{2}\binom{8}{1}}{\binom{10}{3}}=\dfrac{8}{120}$

ve

$$E(X)=\frac{an}{N}=n\times\frac{a}{N}=3\times\frac{2}{10}=0.6$$

$$Var(X)=\frac{N-n}{N-1}n\frac{a}{N}\left(1-\frac{a}{N}\right)=\frac{10-3}{10-1}\times 3\times\frac{2}{10}\times(1-\frac{2}{10})=\frac{28}{45}$$

dır.

<u>Örnek 3</u> 10 beyaz ve 5 siyah top bulunan bir kavanozdan iadesiz olarak 5 kez birer top (aynı anda 5 top) çekildiğinde,

a) Gelen siyah topların sayısının beyazlardan çok olması olasılığı nedir?
b) Siyah topların beklenen sayısı nedir?
c) Siyah top için 100 TL kaybedilse, beyaz top için 50 TL kazanılsa, böyle bir oyunda kazancın beklenen değeri ve varyansı nedir? Olasılık dağılımı nedir?

X-rasgele değişkeni 10 çekilişte gelen siyah topların sayısı olsun. N =15, a =5 , $N-a$ =10 , n =5 olmak üzere, X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$f(x)=\frac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{5}{x}\binom{10}{5-x}}{\binom{10}{5}} \quad , \quad x=0,1,2,3,4,5$$

olasılık tablosu,

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)=\dfrac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\dfrac{\binom{5}{0}\binom{10}{1}}{\binom{15}{5}}$	$\dfrac{\binom{5}{1}\binom{10}{4}}{\binom{15}{5}}$	$\dfrac{\binom{5}{2}\binom{10}{3}}{\binom{15}{5}}$	$\dfrac{\binom{5}{3}\binom{10}{2}}{\binom{15}{5}}$	$\dfrac{\binom{5}{4}\binom{10}{1}}{\binom{15}{5}}$	$\dfrac{\binom{5}{5}\binom{10}{0}}{\binom{15}{5}}$

Matlab hesaplaması:

```
>> x=0:5
x =                  0        1         2         3         4         5
>> hygepdf(x,15,5,5)
ans =         0.083916  0.34965    0.3996   0.14985   0.01665  0.000333
```

ve

$$E(X)=\frac{an}{N}=n\times\frac{a}{N}=5\times\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

$$Var\left(X\right)=\frac{N-n}{N-1}n\frac{a}{N}\left(1-\frac{a}{N}\right)=\frac{15-5}{15-1}\times5\times\frac{5}{15}\times(1-\frac{5}{15})=\frac{50}{63}$$

dır.

a) $P(X\geq 3)=\sum_{x=3}^{5}\frac{\binom{5}{x}\binom{10}{5-x}}{\binom{15}{5}}=0.14985+0.1665+0.000333=0.16683$

b) $E(X)=n\times\frac{a}{N}=\frac{5}{3}$

c) K rasgele değişkeni kazanç olsun.

$$K=-100X+50(5-X)=-150X+250$$

ve

$$E(K)=-150E(X)+250=-150\times\frac{5}{3}+250=0$$

$$Var(K)=Var(-150X+250)=22500Var(X)=22500\times\frac{50}{63}\approx 17857$$

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.083916	0.34965	0.3996	0.14985	0.01665	0.000333
k = -150x+250	250	50	-50	-200	-350	-500
$g(k)$	0.083916	0.34965	0.3996	0.14985	0.01665	0.000333

dır.

Bu örnekte, çekilişler iadeli olarak yapılsaydı, X rasgele değişkeni Binom Dağılımına sahip olurdu.

$$X\sim b(n=15,p=\frac{1}{3})$$

$$E(X)=np=5\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

$$Var\left(X\right)=npq=5\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{10}{9}$$

$P(X\geq 3)$=0.20988

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)=\binom{5}{x}(\frac{1}{3})^x(\frac{2}{3})^{5-x}$	0.13169	0.32922	0.32922	0.16461	0.041152	0.0041152
k = -150x+250	250	50	-50	-200	-350	-500
$g(k)$	0.13169	0.32922	0.32922	0.16461	0.041152	0.0041152

$$K=-100X+50(5-X)=-150X+250$$
$$E(K)=-150E(X)+250=-150\times\frac{5}{3}+250=0$$
$$Var(K)=Var(-150X+250)=22500Var(X)=22500\times\frac{10}{9}\approx 25000$$

olmak üzere, X ve K rasgele değişkenlerinin dağılımları değişmiş, beklenen değerleri aynı kalmış ve varyansları büyümüştür.

İadeli ve iadesiz çekilişleri karşılaştıralım.

<table>
<tr>
<td>

N tane nesneden a tanesi belli özelliğe sahip olsun. Bu nesnelerden iadeli olarak ardı ardına n kez birer nesne çekilmesi deneyinde Y rasgele değişkeni çekilen n nesne arasında belli özelliğe sahip olanların sayısı olsun. Y Binom Dağılımına sahiptir.

$$Y\sim b(n,p=\frac{a}{N})$$

$$f(y)=\binom{n}{y}p^y q^{n-y}\ ,\ y=0,1,2,...,n$$

$$E(Y)=np=n\times\frac{a}{N}$$

$$Var(Y)=npq=n\times\frac{a}{N}\times(1-\frac{a}{N})$$

</td>
<td>

N tane nesneden a tanesi belli özelliğe sahip olsun. Bu nesnelerden iadesiz olarak ardı ardına n kez birer nesne çekilmesi veya aynı anda n tane nesne çekilmesi deneyini göz önüne alalım. X rasgele değişkeni çekilen n nesne arasında belli özelliğe sahip olanların sayısı olsun. X Hiprdeometrik Dağılıma sahiptir.

$$f(x)=\frac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(X)=\frac{an}{N}=n\times\frac{a}{N}$$

$$Var(X)=\frac{N-n}{N-1}\times n\times\frac{a}{N}\times\left(1-\frac{a}{N}\right)$$

</td>
</tr>
</table>

Görüldüğü gibi rasgele çekilen nesneler arasında belli özelliğe sahip nesnelerin sayısının beklenen değeri iadeli ve iadesiz çekilişlerde aynıdır. Fakat varyanslar birbirine eşit değildir. İadeli çekilişlerde varyans daha büyüktür ($\frac{N-n}{N-1}<1$).

$$E(Y)=E(X)$$
$$Var(Y)\geq Var(X)$$

Toplam nesne sayısı N artsın (nesneler çoğalsın) ve belli özelliğe sahip olan nesne sayısı $\frac{a}{N}$

sabit bir sayıya $\left(\frac{a}{N} \to p\right)$ yakınsasın. Başka bir ifade ile, belli özelliğe sahip olan nesne sayısı $\frac{a}{N}$ sabit bir sayıya yakınsayacak şekilde $N \to \infty$ olsun. Çekilen nesne sayısı n sabit (aynı) kalsın. Bu durumda,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N-n}{N-1} = 1$$

olmak üzere, toplam nesne sayısı çok büyük olduğunda,

$$Var(Y) = npq = n \times \frac{a}{N} \times (1 - \frac{a}{N})$$
$$Var(X) = \frac{N-n}{N-1} \times n \times \frac{a}{N} \times \left(1 - \frac{a}{N}\right)$$

değerleri yaklaşık olarak birbirine eşit olacaktır. Hatta, toplam nesne sayısı N oldukça büyük ve çekilen nesne sayısı n buna göre nispeten küçük olduğunda,

$$\frac{N-n}{N-1} \approx 1$$

olmak üzere,

$$n \times \frac{a}{N} \times \left(1 - \frac{a}{N}\right) \approx \frac{N-n}{N-1} \times n \times \frac{a}{N} \times \left(1 - \frac{a}{N}\right)$$

olmaktadır. Ayrıca,

$$f(x) = \frac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}} == \frac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{a!(N-a)!n!(N-n)!}{x!(a-x)!(n-x)!(N-a-n+x)!N!}$$

$$= \binom{n}{x} \frac{(a-x+1)...a(N-a-n+x+1)...(N-a)}{(N-n+1)...N}$$

$$= \binom{n}{x} \frac{a(a-1)...(a-(x-1))(N-a)(N-a-1)...(N-a-(n-x-1))}{N(N-1)...(N-(n-1))}$$

$$= \binom{n}{x} \frac{\frac{a}{N}\left(\frac{a}{N} - \frac{1}{N}\right)...\left(\frac{a}{N} - \frac{x-1}{N}\right)\left(1 - \frac{a}{n}\right)\left(\frac{N-1}{N} - \frac{a}{N}\right)...\left(\frac{N-n+x+1}{N} - \frac{a}{N}\right)}{1\left(1 - \frac{1}{N}\right)...\left(1 - \frac{n-1}{N}\right)}$$

olmak üzere,

$$\lim_{N\to\infty} f(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

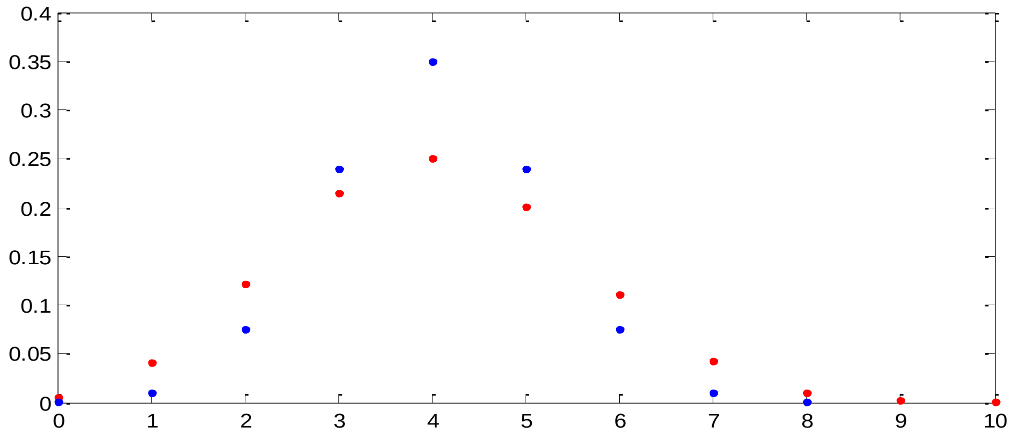
$$= \lim_{N\to\infty} \binom{n}{x} \frac{\frac{a}{N}\left(\frac{a}{N}-\frac{1}{N}\right)\cdots\left(\frac{a}{N}-\frac{x-1}{N}\right)\left(1-\frac{a}{N}\right)\left(\frac{N-1}{N}-\frac{a}{N}\right)\cdots\left(\frac{N-n+x+1}{N}-\frac{a}{N}\right)}{1\left(1-\frac{1}{N}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{N}\right)}$$

$$= \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

yani,

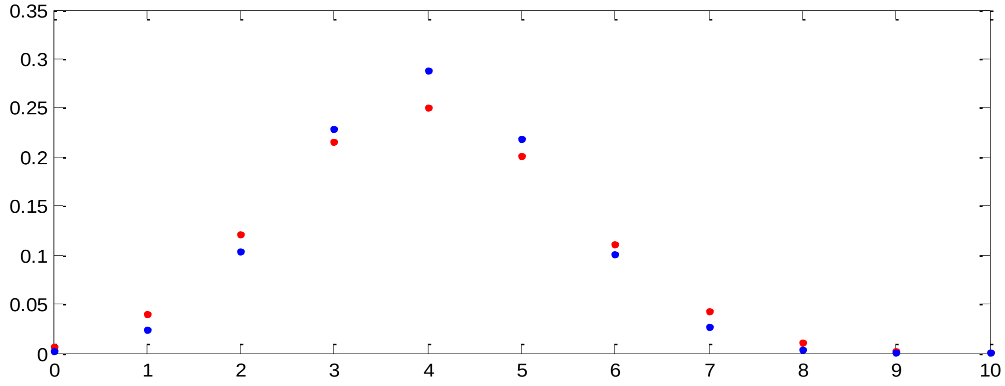
$$\frac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}} \xrightarrow[\frac{a}{N}\to p]{N\to\infty} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

dır. $N \to \infty$ ve $\frac{a}{N} \to p$ durumunda, Hipergeometrik Dağılımındaki olasılıklar Binom Dağılımındaki olasılıklara yakınsamaktadır. Bu duruma şimdilik, "Hipergeometrik Dağılım, Binom Dağılımına yakınsamaktadır" diyelim. Bu özelliği olasılık fonksiyonların grafiklerini çizerek görmeye çalışalım. N =20, a =8, n =10 olan Hipergeometrik Dağılım ile $b(n=10, p=\frac{8}{20}=0.40)$ Binom Dağılımının olasılık fonksiyonlarının grafikleri (mavi-hipergeometrik, kırmızı-binom),

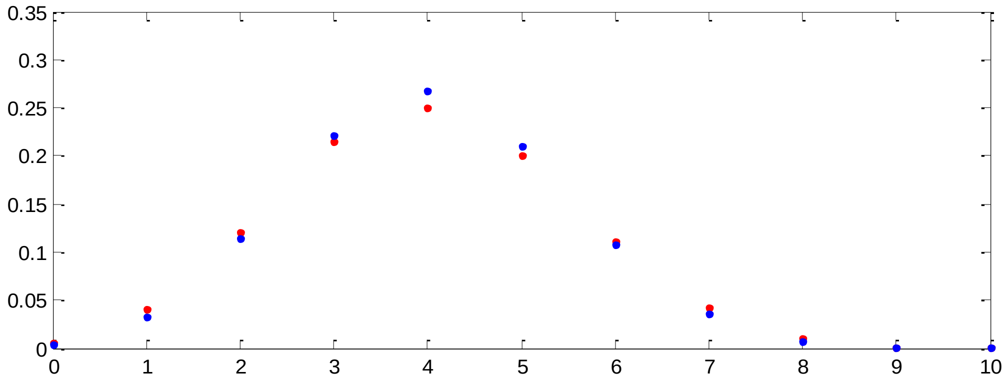


dır.

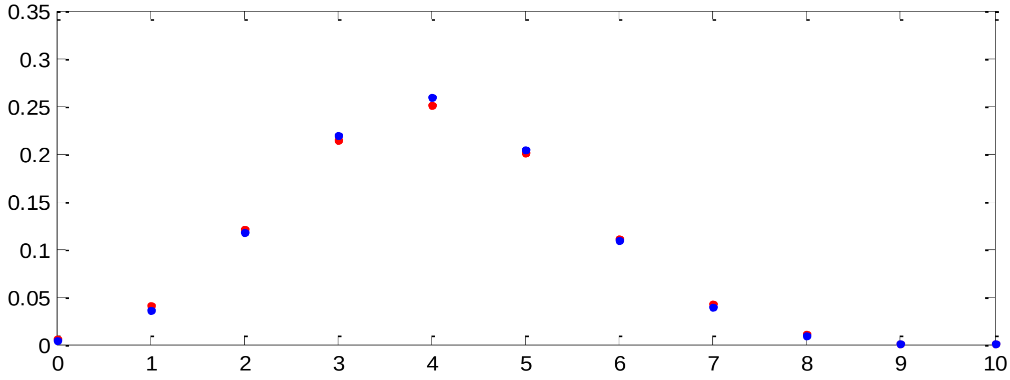
N =40, a =16, n =10 olan Hipergeometrik Dağılım ile $b(n=10, p=\frac{16}{40})$ Binom Dağılımının olasılık fonksiyonlarının grafikleri,



N =80, a =32, n =10 olan Hipergeometrik Dağılım ile $b(n=10, p=\frac{32}{80})$ Binom Dağılımının olasılık fonksiyonlarının grafikleri,



ve N =160, a =64, n =10 olan Hipergeometrik Dağılım ile $b(n=10, p=\frac{64}{160})$ Binom Dağılımının olasılık fonksiyonlarının grafikleri,



dır. Görüldüğü gibi, parametreleri N , a , n olan Hipergeometrik Dağılımdaki olasılıklar, $\frac{a}{N}$ sabit kalma koşuyla, N büyüdükçe $b(n, p=\frac{a}{N})$ Binom Dağılımındaki olasılıklara yaklaşmaktadır.

Toplam nesne sayısı N büyük ve çekilen nesne sayısı n küçük (N göre küçük) olduğunda iadesiz olarak birer birer nesne çekilişi, iadeli yapılmış gibi ele alınabilir.

Geometrik Dağılım

Hatırlatma: Bir deneydeki sonuçlar başarı ya da başarısızlık olarak nitelendirildiğinde, böyle deneylere iki tür sonuçlu deney, Bernoulli deneyi veya Bernoulli denemesi denir. Bu deneylerde,

$$\Omega = B \cup \overline{B}$$

$$U = \varnothing, \Omega, B, \overline{B}$$

$$P(B) = p$$

olmak üzere, B olayına başarı elde etme olayı ve p olasılığına başarı olasılığı ve $0 < p < 1$ için $q = 1 - p = P(\overline{B})$ olasılığına başarısızlık olasılı denir. Başarı olasılığı p olan bir Bernoulli denemesinin aynı şartlar altında, bağımsız olarak n kez tekrarlanmasıyla oluşan deneye Binom Deneyi denir. X rasgele değişkeni n denemede elde edilen başarı sayısı olduğunda, X 'e Binom dağılımına sahiptir denir ve $X \sim b(n, p)$ biçiminde gösterilir. Binom dağılımında,

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad , \quad x = 0, 1, \ldots, n$$

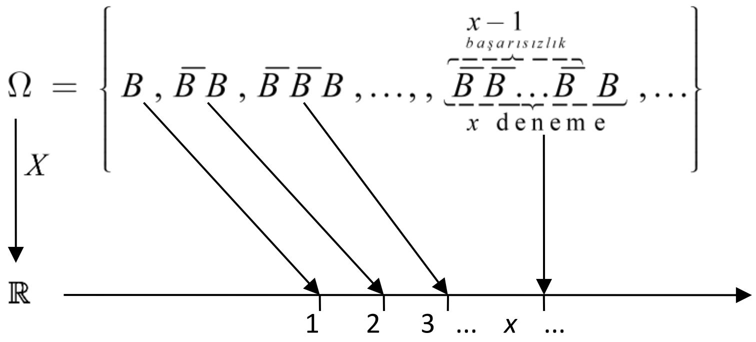
$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \left(q + pe^t\right)^n$$

$$E(X) = np$$

$$Var(X) = npq$$

dır.

Geometrik Dağılım: Başarı olasılığı p olan bir Bernoulli denemesi, aynı şartlar altında, bağımsız olarak bir başarı elde edinceye kadar tekrarlansın. Yapılan deneme sayısı X rasgele değişkeni olsun.



olmak üzere, X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$f\left(x\right)=P(X=x)=P(\underbrace{\overline{B}\overline{B}...\overline{B}}_{x-1\text{ tane}}B)=\underbrace{P(\overline{B})P(\overline{B})...P(\overline{B})}_{x-1\text{ tane}}P(B)=q^{x-1}p \quad , \quad x=1,2,3,...$$

dağılım fonksiyonu,

$$F(x)=P(X\leq x) \quad , \quad x\in\mathbb{R}$$

$$F(x)=\sum_{j=1}^{x}q^{j-1}p=1-q^{x} \; , \quad x=1,2,3,...$$

ve

$$M_X\left(t\right)=E\left(e^{tX}\right)=\sum_{x}e^{tx}f\left(x\right)=\sum_{x=1}^{\infty}e^{tx}q^{x-1}p$$

$$=e^{t}p+e^{2t}qp+e^{3t}q^{2}p+...=pe^{t}\left(1+qe^{t}+\left(qe^{t}\right)^{2}+\left(qe^{t}\right)^{3}+...\right)$$

$$=e^{t}p\frac{1}{1-qe^{t}} \qquad , \qquad (qe^{t}<1 \;,\; t<-\ln q)$$

$$E\left(X\right)=\left.\frac{dM_X\left(t\right)}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{pe^{t}\left(1-qe^{t}\right)-pe^{t}\left(-qe^{t}\right)}{\left(1-qe^{t}\right)^{2}}\right|_{t=0}=\frac{p\left(1-q\right)+pq}{\left(1-q\right)^{2}}=\frac{1}{p}$$

$$E\left(X^2\right)=\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\bigg|_{t=0}=\frac{pe^t\left(1-qe^t\right)^2-pe^t-2\left(1-qe^t\right)\left(-qe^t\right)}{\left(1-qe^t\right)^4}\bigg|_{t=0}$$

$$=\frac{p(1-q)^2+2pq(1-q)}{(1-q)^4}=\frac{(1-q)(p-pq+2pq)}{(1-q)^4}=\frac{1+q}{p^2}$$

$$Var(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2=\frac{q}{p^2}$$

dır.

<u>Örnek 1</u> Bir atıcı için belli bir hedefi vurması olasılığının *p*=0,75 olduğu bilinsin. Atıcı, hedef bir isabet alıncaya kadar atış yapmaya kararlıdır.

a) Hedefi 4 atıştan önce vurması olasılığı ?

b) En az 3 atış yapması olasılığı nedir?

c) 10 atış yaptığı bilindiğinde bundan sonra en az 3 atış yapması olasılığı nedir?

d) Amacına yanında bulunan 2 mermi ile ulaşması olasılığı nedir?

e) Hedefin değeri 200 TL ve bir atışın maliyeti 100 TL olduğuna göre, böyle bir oyunda kazancın beklenen değeri nedir ? Kazancın olasılık dağılımı nedir?

f) Oyunun dürüst olması için hedefin değeri ne olmalıdır?

Hedef bir isabet alıncaya kadar yapılan atış sayısı *X* rasgele değişkeni olsun. *X* Geometrik Dağılıma sahiptir.

$$f(x)=q^{x-1}p=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}\frac{3}{4} \qquad , \quad x=1,2,...$$

$$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{4}{3} \quad , \quad Var(X)=\frac{q}{p^2}=\frac{4}{9}$$

a) $P(X<4)=f(1)+f(2)+f(3)=\left(\frac{1}{4}\right)^0\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^1\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4}=\frac{63}{64}$

b) $P(X\geq 3)=1-P(X<3)=1-f(1)-f(2)=1-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

c)

$$P(X \geq 13 / X > 10) = \frac{P(X \geq 13 \ ve \ X > 10)}{P(X > 10)} = \frac{P(X \geq 13)}{P(X > 10)} = \frac{1 - P(X \leq 12)}{1 - P(X \leq 10)} = \frac{1 - F(12)}{1 - F(10)} = \frac{q^{12}}{q^{10}} = q^2 = \frac{1}{16}$$

d) $P(X \leq 2) = f(1) + f(2) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{15}{16}$

e) Kazanç: $K = 200 - 100X$

$$E(K) = 200 - 100\ E(X)$$

$$E(K) = 200 - 100 \times \frac{4}{3} = \frac{200}{3}$$

Kazancın olasılık dağılımı:

k	100	0	-100	-200	-300	...
$f(k)$	$3/4$	$3/16$	$3/64$	$3/256$	$3/1024$	...

$$E(K) = \frac{200}{3} \quad , \quad Var(K) = 10000 Var(X) = 10000 \times \frac{4}{9} = \frac{40000}{9}$$

f) Oyunun dürüst olması için kazancın beklenen değeri (kazanç ortalaması) sıfır olmalıdır.

$$K = a - 100.X$$

$$E(K) = 0 \ (oyunun \ dürüst \ olması)$$

$$0 = a - 100.E(X)$$

$$0 = a - \frac{400}{3}$$

$$a = \frac{400}{3}$$

Negatif Binom Dağılımı

Başarı olasılığı p olan bir Bernoulli denemesinin aynı şartlar altında bağımsız olarak k başarı elde edinceye kadar yapılması deneyini göz önüne alalım. X rasgele değişkeni, k başarı elde edilinceye kadar yapılan denemelerin sayısı olsun. X rasgele değişkeninin aldığı değerlerin kümesi,

$$D_X = \{k, k+1, k+2, \ldots\}$$

Ve

$$P(X=k) = P(\underbrace{BB\ldots B}_{\text{k tane}}) = \underbrace{pp\ldots p}_{n \text{ tane}} = p^k$$

$$P(X=k+1) = P(\underbrace{\overbrace{\bar{B}B\ldots B}^{\substack{k\ deneme \\ k-1\ başarı}}\, B}_{\text{k+1 tane}}\ veya\ \underbrace{\overbrace{B\bar{B}B\ldots B}^{\substack{k\ deneme \\ k-1\ başarı}}\, B}_{\text{k+1 tane}}\ veya \ldots\ veya\ \underbrace{\overbrace{BB\ldots B\bar{B}}^{\substack{k\ deneme \\ k-1\ başarı}}\, B}_{\text{k+1 tane}}) = \binom{k}{k-1}\ p^{\,k-1} q^1 p = \binom{k}{1} q^1 p^k$$

...

$$P(X=x) = P(\left\{ \underbrace{\overbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}^{\substack{x-1\ deneme \\ k-1\ başarı}}\quad \overset{\substack{son \\ deneme \\ başarı}}{.}}_{x \text{ tane}} \right\}) = \binom{x-1}{k-1} p^{k-1} q^{x-1-(k-1)} p = \binom{x-1}{k-1} q^{x-k)} p^k$$

...

olup, X in olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = \binom{x-1}{k-1} q^{x-k} p^k \quad , \qquad x = k, k+1, k+2, \ldots$$

dır.O zaman,

$$\sum_{x=k}^{\infty} \binom{x-1}{k-1} q^{x-k} p^k = 1$$

$$\sum_{x=k}^{\infty} \binom{x-1}{k-1} q^{x-k} = p^{-k} = (1-q)^{-k}$$

dır.

Not: $a \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$

$$\binom{a}{k} = \frac{a \times (a-1) \times \ldots \times (a-(k-1))}{1 \times \ 2 \ \times \ldots \times \ \ k} \quad , \quad \binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} \quad , \quad \binom{5.9}{3} = \frac{5.9 \times 4.9 \times 3.9}{1 \times 2 \times 3} \quad , \quad \binom{2}{3} = \frac{2 \times 1 \times 0}{1 \times 2 \times 3}$$

$f(u) = (1+u)^a$, $|u| < 1$ fonksiyonunun McLaurin serisi $f(u) = (1+u)^a = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{a}{j} u^j$

$n \in \mathbb{Z}^+$ için binom (iki terimli) açılımı:

$$(1+u)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} (u)^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (u)^j$$

$$(q+p)^n = q^n (1 + \frac{p}{q})^n = q^n \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \left(\frac{p}{q} \right)^x = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$k \in \mathbb{Z}^+$ için negatif binom açılımı:

$$(1+u)^{-k} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k}{j} u^j = \sum_{x=k}^{\infty} \binom{-k}{x-k} u^{x-k} = \sum_{x=k}^{\infty} \binom{x-1}{k-1} (-u)^{x-k}$$

$$(1-q)^{-k} = \sum_{x=k}^{\infty} \binom{x-1}{k-1} q^{x-k} \quad , \qquad 1 = \sum_{x=k}^{\infty} \binom{x-1}{k-1} q^{x-k} p^k$$

$$(1-qe^t)^{-k} = \sum_{x=k}^{\infty} \binom{x-1}{k-1} (qe^t)^{x-k} \quad , \quad t < -\ln q$$

Binom Dağılımı ile Negatif Binom Dağılımı isimleri bu açılımlardan gelmektedir.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=k}^{\infty} e^{tx} \binom{x-1}{k-1} q^{x-k} p^k = (pe^t)^k \sum_{x=k}^{\infty} \binom{x-1}{k-1} (qe^t)^{x-k}$$

$$= (pe^t)^k (1-qe^t)^{-k} = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^k \quad , \quad t < -\ln q$$

$$E(X) = \left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{k}{p}$$

$$E(X^2) = \left.\frac{d^2 M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \frac{k(k+q)}{p^2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{kq}{p^2}$$

Dikkat edilirse, Geometrik Dağılım *k*=1 için Negatif Binom Dağılımının özel bir halidir.

<u>Örnek 2</u> Bir atıcı için belli bir hedefi vurması olasılığının *p*=0,75 olduğu bilinsin. Atıcı, hedef üç isabet alıncaya kadar atış yapmaya kararlıdır.

a) 4 atış yapması olasılığı nedir?

b) En çok 4 atış yapması olasılığı nedir?

c) En az 4 atış yapması olasılığı nedir?

d) Amacına yanında bulunan 5 mermi ile ulaşması olasılığı nedir?

e) Hedefin değeri 200 TL ve bir atışın maliyeti 100 TL olduğuna göre, böyle bir oyunda kazancın beklenen değeri nedir ? Kazancın olasılık dağılımı nedir?

f) Oyunun dürüst olması için hedefin değeri ne olmalıdır?

Hedef üç isabet alıncaya kadar yapılan atış sayısı *X* rasgele değişkeni olsun. *X* Negatif Binom Dağılımına sahiptir.

$$f(x)=\binom{x-1}{3-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}\left(\frac{3}{4}\right)^{3} \quad , \qquad x=3,45,\ldots$$

$$E(X)=\frac{k}{p}=4 \quad , \quad Var(X)=\frac{kq}{p^2}=\frac{4}{3}$$

a) $P(X=4)=\binom{4-1}{3-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{4-3}\left(\frac{3}{4}\right)^{3}=\frac{81}{256}$

b) $P(X\le 4)=f(3)+f(4)=\left(\frac{3}{4}\right)^{3}+\binom{4-1}{3-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{4-3}\left(\frac{3}{4}\right)^{3}=\frac{189}{256}$

c) $P(X\ge 4)=1-P(X<4)=1-f(3)=1-\frac{27}{64}=\frac{148}{256}$

d) $P(X\le 5)=f(3)+f(4)+f(5)=\left(\frac{3}{4}\right)^{3}+\binom{4-1}{3-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{4-3}\left(\frac{3}{4}\right)^{3}+\binom{5-1}{3-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{5-3}\left(\frac{3}{4}\right)^{3}=\frac{459}{512}$

e) Kazanç: $K=200\text{-}100X$

$$E(K)=3\times 200\text{-}100\ E(X)=600-100X$$
$$E(K)=600\text{-}100\times 4=200$$

Kazancın olasılık dağılımı:

k	200	100	0	-100	-200	...
$f(k)$	$108/256$	$81/256$	$81/512$	$135/2048$	$567/16384$	...

$$E(K)=200 \quad , \quad Var(K)=10000Var(X)=10000\times\frac{4}{3}=\frac{40000}{3}$$

f) Oyunun dürüst olması için kazancın beklenen değeri (kazanç ortalaması) sıfır olmalıdır.

$$K=3a\text{-}100.X$$
$$E(K)=0 \ (\textit{oyunun dürüst olması})$$

$$0 = 3a - 100.E(X)$$
$$0 = 3a - 400$$
$$a = \frac{400}{3}$$