Tanım: Bir bilinmeyen fonksiyonun bir bağımsız değişkene göre türevini ya da türevlerini içeren denklemlere **bayağı (düz türevli) diferensiyel denklem** adı verilir.

Örnek:

$$\frac{dy}{dx} = x + 5$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$xy' + y = 3$$

$$y''' + 2(y'')^2 + yy' = Cosx$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

Yukarıdaki ilk dört örnek bağımlı değişkeni y, bağımsız değişkeni x olan bayağı diferensiyel denklemlerdir. Eğer birden fazla bağımsız değişken sözkonusu ise bu durumda denkleme Kısmi Diferensiyel Denklem adı verilir. 5. örnek bir kısmi diferensiyel denklemdir. Bu derste düz türevli diferensiyel denklemlerle ilgilenilecektir.

Tanım: Bir diferensiyel denklemdeki en yüksek türevin basamağına diferensiyel denklemin **basamağı** ya da **mertebesi** adı verilir.

Tanım: Bir diferensiyel denklem, bağımlı değişken ve türevlerine gore polinom biçiminde (veya yazılabiliyor) ise denklemdeki en yüksek türevin kuvvetine diferensiyel denklemin **derecesi** adı verilir.

Örnek: Aşağıdaki denklemlerin bağımlı-bağımsız değişkenlerini, basamağını ve varsa derecesini belirleyiniz;

$y\frac{dx}{dy} = y^2 + 1$ x bağımlı y bağımısız değişken, 1. basamaktan 1. dereceden dif. denk

$dy + (xy - cosx)dx = 0$ bağımlı-bağımsız değişken belirsiz, 1. basamaktan dif. denk.

$3t(w'')^3 - 2(w')^4 = t^3$ w bağımlı, t bağımsız değişken, 2. bas. 3. dereceden dif. denk.

$y^{(4)} - 5xy''' + 4y'' - 2y^2 = x + 1$

$\ddot{x} = \sqrt[3]{(\dot{x})^2 + yx}$

LINEER DIFERENSIYEL DENKLEMLER

n-yinci basamaktan en genel lineer diferensiyel denklem formu

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \qquad (1)$$

şeklindedir. Burada katsayılar sabit ya da bağımsız değişkenin fonksiyonudur. Eğer $\forall a_i \in \mathbb{R},\ \ i = 1, 2, \dots, n$ ise bu durumda denkleme sabit katsayılı lineer diferensiyel denklem, $\exists a_i = a_i(x),\ \ i = 1, 2, \dots, n$ şeklinde ise yani katsayılardan en az biri bağımsız değişkenin bir fonksiyonu ise denkleme değişken katsayılı lineer denklem adı verilir. Diğer taraftan Lineer diferensiyel denklemlerle ilgili önemli bir diger sınıflandırma da Homogenliktir. (1) denklemindeki *f(x)* fonksiyonu özdeş olarak sıfırsa yani denklemin sağ tarafı sıfırsa denkleme Homogen aksi taktirde Homogen olmayan denklem adı verilir.

Örnek. Aşağıdaki denklemleri lineerlik durumlarına gore sınıflandırınız;

1. $2y'' + y' - 5y = 0$: 2. basamaktan sabit katsayılı lineer homogen dif. denklem

2. $y''' - xy = Sinx$

3. $\ddot{x} + 4x = t + 1$

4. $y'' + 2y' + y + 1 = 0$

5. $y'' + xyy' = 0$

6. $w'' - tw' + w = sinw$

7. $y^{(4)} - 5y'' + y^4 = x - 5$

ÇÖZÜMLER

y bağımlı, *x* bağımsız değişkenli bir diferensiyel denklemin bir *I* aralığı üzerinde çözümü, *I* daki her *x* için özdeş olarak denklemi sağlayan bir *y(x)* fonksiyonudur.

Bir difernesiyel denklemin bütün çözümlerini içinde barındıran çözüme **Genel Çözüm** adı verilir. Genel çözümler denklemin basamağı kadar keyfi sabiti (integral sabitini) içinde barındıran çözümlerdir.

Genel çözümlerde keyfi sabitlere özel değer verilerek elde edilen çözümlere **özel çözüm** adı verilir.

Genel çözümden elde edilemediği halde denklemi sağlayan çözümler olabilir. Bu tip çözümler ise **Aykırı (tekil) çözüm** adını alırlar ve Lineer olmayan diferensiyel denklemlerde karşımız çıkarlar.

Örnek. c_1 ve c_2 keyfi reel sabitler olmak üzere $y(x) = c_1\,\mathrm{Sin}(2x) + c_2\mathrm{Cos}\,(2x)$ ile verilen fonksiyonun $y'' + 4y = 0$ denkleminin bir çözümü olup olmadığını kontrol ediniz.

Yukarıda verilen çözüm ilerleyen bölümlerde görüleceği üzere denklemin genel çözümüdür. Diğer taraftan $y = 5Sin(2x) - 3Cos(2x)$, $y = -Cos(2x)$, $y = 0$ gibi çözümler de denklemin bazı özel çözümleridir.

BAŞLANGıÇ DEĞER VE SıNıR DEĞER PROBLEMLERI

Bir diferensiyel denklemle birlikte koşullar bağımsız değişkenin tek bir değerinde veriliyorsa diferensiyel denklemle birlikte koşula ya da koşullara Bir Başlangıç Değer Problemi adı verilir. Eğer diferensiyel denklemle birlikte koşullar bağımsız değişkenin birden fazla noktasında veriliyorsa bu problem bir Sınır Değer Problemi olarak adlandırılır.

Örnek.

$$y'' + 2y' = e^x, \quad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

bir Başlangıç değer problemi iken,

$$y'' + 2y = e^x \quad , \qquad y(0) = 1, \qquad y(1) = 2$$

bir Sınır değer problemidir.

DIFERENSIYEL DENKLEMLERIN ELDE EDILMESI

Verilen bir eğri ailesini çözüm kabul eden diferensiyel denklemi bulmak için eğri ailesindeki keyfi sabit sayısı kadar türev alınıp, sabitler yok edilmelidir. 1 keyfi sabit içeren durumda,

$$f(x, y, c) = 0$$

eğri ailesi verildiğinde, x'in bağımsız değişken olduğu kabulü altında x değişkenine gore 1 kere türev alınarak (keyfi sabit sayısı 1 olduğundan) elde edilen denklem ile verilen eğri ailesi arasından c sabiti yok edilerek

$$F(x, y, y') = 0$$

şeklinde 1. basamaktan bir diferensiyel denklem elde edilir.

Örnek. $y = cx^2 + 4$ eğri ailesini çözüm kabul eden en düşük basamaktan diferensiyel denklemi bulunuz.

Çözüm. Bir keyfi sabit olduğundan bir kere türev almak yeterlidir;

$$y' = 2cx \quad \Rightarrow c = \frac{y'}{2x}$$

ifadesi verilen eğri ailesinde yerine yazılarak

$$xy' - 2y = -8$$

diferensiyel denklemi elde edilir.

Örnek. $y = c_1 Sinx + c_2 Cosx$ eğri ailesini çözüm kabul eden diferensiyel denklemi bulunuz.

Çözüm. Iki keyfi sabit olduğundan aranan diferensiyel denklem 2. basamaktandır. 2 kez türev almak yeterlidir.

$$y' = c_1 Cosx - c_2 Sinx$$
$$y'' = -c_1 Sinx - c_2 Cosx$$

elde edilir. Buradan 1. ve 3. denklemlerin toplamının sıfır oldugu görülür. Aranan denklem;

$$y'' + y = 0$$

dır.