

DEĞİŞKENLERİNE AYRILABİLEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

denklemini

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

şeklinde yazılabiliyorsa verilen denklem Ayrılabilir denir. Bir diferensiyel denklemin ayrılabilir olması P ve Q katsayılarının $f(x).g(y)$ biçiminde çarpanlarına ayrılabilmesine bağlıdır. Böyle denklemler değişkenlerine ayrılabilir. Denklemin çözümü

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

ni doğrudan integrali alınarak elde edilir.

Örnek 1. Aşağıdaki denklemin çözümünü elde ediniz.

$$2(y + 3)dx - xydy = 0$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} dx &= \frac{y}{y+3} dy \\ &= \left(1 - \frac{3}{y+3}\right) dy \end{aligned}$$

$$2\ln x = y - 3\ln(y+3) + \ln c$$

$$e^y = cx^2(y+3)^3$$

denklemin bir parametrelili çözümüdür (ya da integral eğrileridir).

Örnek 2. $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0$$

denkleminde integral alınır

$$\arctan x + \arctan y = \arctan c$$

ifadesi elde edilir. Bu çözümden daha iyi bir gösterim;

$$y = \frac{c-x}{1+cx}$$

şeklinde. (Gösteriniz.)

Örnek 3.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}$$

denkleminin $y(0)=-1$ koşulunu sağlayan çözümünü $y=f(x)$ şeklinde bulunuz.

Çözüm:

$$2(y - 1)dy = (3x^2 + 4x + 2)dx$$

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c$$

$y(0)=-1$ den;

$$1 + 2 = c \Rightarrow c = 3$$

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$$

buradan aranan çözüm;

$$y = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$

şeklinde elde edilir.

HOMOGEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Homogen Fonksiyon: Eğer bir $f(x,y)$ fonksiyonu

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

şeklinde yazılabilecek biçimde bir n reel sabiti bulunabiliyorsa, f fonksiyonuna x ve y 'e göre n -yinci dereceden homogen fonksiyon adı verilir.

Örnek 1. $f(x, y) = 3x + 5y$ fonksiyonu x ve y 'e göre 1. dereceden homogen bir fonksiyondur;

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= 3\lambda x + 5\lambda y \\ &= \lambda(3x + 5y) \\ &= \lambda f(x, y) \end{aligned}$$

Örnek 2. $f(x, y) = x^2 + 5xy - 3y^2$ fonksiyonu x ve y 'e göre 2. dereceden homogen bir fonksiyondur;

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \lambda^2 x^2 + 5\lambda^2 xy - 3\lambda^2 y^2 \\ &= \lambda^2 (x^2 + 5xy - 3y^2) \\ &= \lambda^2 f(x, y) \end{aligned}$$

Homogen diferensiyel denklemler bu tür fonksiyonlardan elde edilir;

Homogen Diferensiyel Denklem

Eğer

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

denkleminde P ve Q aynı dereceden homogen fonksiyonlar ise bu durumda verilen diferensiyel denklem Homogen Diferensiyel Denklem adını alır. Bu özelliğe sahip her denklem

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Diğer yandan bu biçimdeki denklemler de Homogen diferensiyel denklem olarak adlandırılır. Homogen diferensiyel denklemin bu özelliği çözüm yöntemini de beraberinde getirir.

$$\begin{aligned} y &= xv \\ y' &= v + xv' \end{aligned}$$

konumları denkleme uygulanırsa verilen denklem kesinlikle Değişkenlerine ayrılabilen bir denkleme indirgenecektir.

Örnek 1. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ denkleminin çözümünü bulun.

Çözüm. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x} = \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ şeklinde yazılabildiğinden verilen denklem Homogen bir diferensiyel denklemdir.

$$y = xv$$

$$y' = v + xv'$$

denkleme yerine yazıldığında,

$$v + xv' = \frac{\sqrt{x^2 - x^2 v^2} + xv}{x} = \sqrt{1 - v^2} + v$$

$$x \frac{dv}{dx} = \sqrt{1 - v^2}$$

denkleme elde edilir. Bu aşamadan sonra denklem değişkenlerine ayrılabilir;

$$\frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\arcsin v = \ln x + \ln c = \ln cx$$

$$v = \sin(\ln cx)$$

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow$$

$$y = x \sin(\ln cx)$$

çözümü elde edilir.

Örnek 2. $xy' = y(\ln y - \ln x)$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: Verilen denklem $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$ şeklinde yazılabildiğinden Homogendir.

$$y = xv$$

$$y' = v + xv'$$

yerlerine yazılırsa

$$x \frac{dv}{dx} = v \ln v - v$$

denkleme varılır. Bu denklem değişkenlerine ayrılırsa

$$\frac{dv}{v \ln v - v} = \frac{dx}{x}$$

elde edilir. Sol tarafın integrali için $\ln v = z$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\frac{dz}{z - 1} = \frac{dx}{x}$$

elde edilir. İntegral alınır ve değişkenler sırasıyla yerlerine yazılırsa;

$$y = x e^{cx+1}$$

genel çözüm olarak elde edilir.