HOMOGEN DİFERENSİYEL DENKLEME İNDİRGENEBİLEN DENKLEMLER

Bu kısımda özel olarak

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

şeklindeki denklemler ele alınacaktır. Bu denklemin katsayıları düzlemde birer doğru belirtirler. Burada c_1 ve c_2 katsayıları aynı anda sıfır olmayacak şekilde kabul edilmiştir. (Dikkat edilirse $c_1 = c_2 = 0$ durumunda denklem Homogen Diferensiyel denkleme indirgenir.) Bu tip denklemler katsayıları oluşturan doğruların pararel olması ya da kesişmesi durumlarına gore iki kısımda incelenir.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

doğrularını göz önüne alalım.

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$$

olsun.

<u>I. Durum:</u> İlk olarak doğruların paralel olması halini göz önüne alalım. Bu durumda

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

dır ve dolayısıyla $\Delta = 0$'dır. Böyle bir durumda katsayılardaki en sade $ax + by$ ikilisine yeni bir değişken gözüyle bakılır.

$$a_1x + b_1y = u$$

değişken değiştirmesi ile verilen denklem Değişkenlerine Ayrılabilen Diferensiyel denkleme indirgenir. (Bu dönüşümün $a_2x + b_2y = u$ ile de tanımlanabileceğine dikkat ediniz.)

<u>II. Durum</u>: $\Delta \neq 0$ durumunda doğrular orjinden farklı bir noktada kesişirler. (Nedenini açıklayınız.) Bu doğruların kesim noktası (h, k) olsun. Denklemde

$$x = X + h$$
$$y = Y + k$$

öteleme dönüşümleri yapılırsa elde edilen yeni denklem

$$(a_1X + b_1Y)dX + (a_2X + b_2Y)dY = 0$$

biçiminde Homogen bir diferensiyel denklem olacaktır. Yeni doğruların kesim noktalarının orjin noktası olduğuna dikkat ediniz.

Örnek 1. $(2x-y)dx+(4x-2y+1)dy=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. $\Delta=2(-2)-4(-1)=0$ olduğundan doğrular pararleldir. Bu durumda denklemde $2x-y=u$ değişken değiştirmesi yapılırsa $2dx-dy=du$ 'dan $dy=2dx-du$ olup;

$$udx+(2u+1)(2dx-du)=0$$

$$\Longrightarrow (5u+2)dx-(2u+1)du=0$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilen denklem elde edilir. Buradan,

$$\frac{2u+1}{5u+2}du=dx$$

olup basit kesirlere ayırma ile,

$$\left(\frac{2}{5}+\frac{\frac{1}{5}}{5u+2}\right)du=dx$$

elde edilir. Bu son denklemin integrali;

$$\frac{2}{5}u+\frac{1}{25}\ln(5u+2)-x=c'$$

olup $2x-y=u$ yerine yazılırsa verilen denklemin genel çözümü

$$-5x-10y+\ln(10x-5y+2)=c$$

biçiminde elde edilir. (Burada 25c'=c alınmıştır.)

Örnek 2. $(x+2y-2)dx-(y-2x-1)dy=0$ denkleminin çözümünü bulalım;

$$x+2y-2=0$$

$$y-2x-1=0$$

doğruları için $\Delta\neq 0$ olup doğruların kesim noktası (0,1)'dir. Buna göre denklemde

$$\begin{cases} x=X \\ y=Y+1 \end{cases}$$

dönüşümleri yapılırsa elde edilen yeni denklem

$$(X+2Y)dX-(Y-2X)dY=0$$

şeklindeki Homogen diferensiyel denklemdir

$$\frac{dY}{dX}=\frac{2Y+X}{Y-2X}$$

denkleminde

$$\frac{Y}{X}=u$$

dönüşümü yapılırsa;

$$u+Xu'=\frac{2u+1}{u-2}$$

denklemi elde edilir. Buradan da değişkenlerine ayrılabilen

$$\frac{u-2}{u^2-4u-1}du+\frac{dX}{X}=0$$

denlemine varılır. Bu denklemin integrali alınırsa,

$$\ln(u^2-4u-1)+2lnX=lnc$$

den $$(u^2-4u-1)X^2=c$$

olup,

$$\frac{Y}{X}=u \Longrightarrow \quad Y^2-4XY-x^2=c$$

çözümüne ulaşılır. Son olarak $X=x,\ Y=y-1$ dönüşümleri yerlerine yazılırsa verilen deklemin genel çözümü;

$$y^2-2y-4xy+4x-x^2=c$$

biçiminde elde edilir.

BİRİNCİ BASAMAKTAN TAM DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Eğer $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ denkleminin sol yanı bir f(x,y) fonksiyonunun diferensiyelini almakla elde edilebiliyorsa ya da başka bir deyişle

$$df(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

olacak şekilde bir f(x,y) fonksiyonu mevcutsa verilen denkleme Tam Diferensiyel denklem adı verilir.

Eğer $P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ fonksiyonları sürekli ve xy-düzlemi üzerinde bir dikdörtgensel bölge üzerinde birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahipse verilen denklemin Tam diferensiyel denklem olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

dir.

Verilen denklemi çözmek için öncelikle *f(x,y)* fonksiyonu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y)$$

denklemlerinden elde edilir. Verilen denklemin genel çözümü de, c keyfi integral sabiti olmak üzere;

$$f(x,y) = c$$

ile ifade edilir.

Örnek 1. $(y + 2xy^3)dx + (1 + 3x^2y^2 + x)dy = 0$ denkleminin genel çözümünü elde ediniz.

Çözüm. $P(x,y) = (y + 2xy^3)$ ve $Q(x,y) = (1 + 3x^2y^2 + x)$ için

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 1 + 6xy^2 = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

olduğundan verilen denklem Tam'dır. Buna gore öyle bir $f(x,y)$ fonksiyonu vardır ki;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2xy^3 \qquad (1a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + 3x^2y^2 + x \qquad (1b)$$

eşitlikleri sağlanır. (1a)'da her iki tarafın x'e gore integrali alınırsa;

$$f(x,y) = xy + x^2y^3 + h(y)$$

elde edilir. Son ifadenin y'e gore türevi alınırsa;

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 3x^2y^2 + h'(y)$$

elde edilir. Dikkat edilirse bu son denklem ile (1b)'nin sol tarafları birbirine eşittir. Dolayısıyla sağ taraflar da birbirine eşitlenerek;

$$h'(y) = 1$$

ve buradan da

$$h(y) = y + c_1$$

bağıntısı elde edilir. Burada c_1 integral sabitidir. h(y)'nin f(x,y)'de yerine yazılmasıyla aranan fonksiyon;

$$f(x,y) = xy + x^2y^3 + y + c_1$$

şeklinde elde edilir. Buna gore diferensiyel denklemin genel çözümü;

$$xy + x^2y^3 + y = c$$

biçiminde elde edilir.

Örnek 2. $2xe^{2y}dy + (1 + e^{2y})dx = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm.

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2e^{2y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

olduğundan denklem Tam diferensiyel denklemdir.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + e^{2y} \qquad (2.a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^{2y} \qquad (2b)$$

denklemlerinin ilkinden x'egöre integral alınırsa

$$f(x,y) = x + xe^{2y} + h(y)$$

elde edilir. h(y) yi bulmak için yukarıdaki denklemden y'e gore türev alınırsa,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^{2y} + h'(y)$$

elde edilir. (2b)'den,

$$h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c_1$$

elde edilir. Buradan verilen diferensiyel denklemin genel çözümü;

$$x + xe^{2y} = c$$

biçiminde elde edilir.