Birinci Basamaktan Lineer Diferensiyel Denklemler

Tanım:

$$y' + p(x)\, y = q(x) \tag{1}$$

fonmundaki diferensiyel denklemlere birinci basamaktan lineer diferensiyel denlem denir.

(1) diferensiyel denklemini çözmek için öncelikle bu denkleme ait integral çarpanı bulunur.

(1) diferensiyel denkleminin integral çarpanı

$$\lambda(x) = e^{\int p(x) dx}$$

olarak bulunur. Denklem bu integral çarpanı ile çarpıldığında tam diferensiyel denklem elde edilir.

(1) diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$y(x) = \frac{1}{\lambda(x)} \int \lambda(x)\, q(x)\, dx + c$$

şeklinde elde edilir.

Örnek. Aşağıdaki diferensiyel denklemleri çözünüz.

a.

$$y' - 7y = 14x$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= e^{\int -7dx} = e^{-7x} \\ y(x) &= 14e^{7x} \int e^{-7x} x dx + c \end{aligned}$$

b.

$$\frac{dp}{dz} + \frac{2}{z} p = 4$$

c.

$$\frac{dN}{dt} + \frac{1}{t} N = t, \; N(2) = 8$$

Bernoulli Diferensiyel Denklemi

Tanım. $n, 1$ den farklı bir reeel sayı olmak üzere

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

formundaki diferensiyel denklemlere Bernoulli diferensiyel denklemi denir. Bernoulli diferensiyel denklemleri nonlineerdir.

Bu denklemler

$$z = y^{1-n}$$

dönüşümü yardımı ile lineer diferensiyel denkleme dönüştürülerek çözülürler.

Örnek. Aşağıdaki diferensiyel denklemleri çözünüz.

1.

$$y' + 2xy = e^{x^2} y^2$$

Çözüm. n=2 için Bernoulli denklemidir.

$$z = y^{-1}$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -y^2 \frac{dz}{dx}, \\ & \frac{dz}{dx} - 2xz = e^{-x^2} \end{aligned}$$

lineer denklemi elde edilir.

Bu denklemin çözümü

$$z = (-x + c)e^{x^2}$$

dir. Verilen Bernoulli denkleminin çözümü,

$$y = \frac{-1}{(x+c)\, e^{x^2}}$$

olarak bulunur.

2.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = y^2$$

3.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y = e^x y^4$$

4.

$$2\frac{dy}{dx} + y \tan x = \frac{(4x+5)^2}{\cos x} y^3$$