Ters Fark Operatörü ve Özelikleri

Ankara Üniversitesi

Tanım

(Ters Fark Operatörü)
$n \geq n_0$ için $\Delta F(n) = f(n)$ olsun. Bu durumda $n \geq n_0$ için

$$\Delta^{-1} f(n) = F(n) + c,$$

şeklinde tanımlanan Δ^{-1} operatörüne **ters fark operatörü** denir. Burada c keyfi sabittir. Ayrıca, $F(n)$ fonksiyonuna da $f(n)$ nin 1. basamaktan **ters farkı** denir.

Örnek

$f(n) = 5^n$ olmak üzere, $\Delta^{-1} 5^n = \frac{1}{4} 5^n + c$ dir.

Örnek

$f(n) = \sin 3n$ olmak üzere, $\Delta^{-1} \sin 3n = \dfrac{1}{2 \sin \frac{3}{2}} \sin 3(n - \frac{1}{2}) + c$ dir.

Tanım

Δ^{-1} ters fark operatörü

$$\Delta^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Lemma

(a) $\displaystyle\sum_{i=n_0}^{n-1} \Delta x(i) = x(n) - x(n_0)$

Lemma

(b) $\displaystyle\Delta \sum_{i=n_0}^{n-1} x(i) = x(n)$

Teorem

Teorem Δ^{-1} *fark operatörü lineerdir.*

Örnek

$f(n) = \dfrac{n}{6}$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
\Delta^{-1} f(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(i) + c \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{6} + c \\
&= \frac{1}{12}(n-1)n + c
\end{aligned}
$$

Bazı fonksiyonların birinci basamaktan ters farkları aşağıdaki gibidir.

Örnek

$x(n) = 0,\ \Delta^{-1}0 = c$ ve $x(n) = 1,\ \Delta^{-1}1 = n + c, c \in \mathbb{R}$.

Örnek

$$x(n) = \sin an,\ \Delta^{-1}\sin an = \frac{-\cos a(n-\frac{1}{2})}{2\sin\frac{a}{2}},\ n \in \mathbb{N} \text{ ve } a \neq 2k\pi.$$

Örnek

$$x(n) = n^{(a)}, \Delta^{-1}n^{(a)} = \frac{n^{(a+1)}}{a+1} + c,\ a \neq -1.$$

Uyarı! $\Delta\Delta^{-1} = I$ olmasına rağmen $\Delta^{-1}\Delta \neq I$ dır.
Gerçekten,
$\Delta\Delta^{-1}f(n) = f(n)$ ve $\Delta^{-1}\Delta f(n) = f(n) + c$ dir.