Lineer Fark Denklemler Teorisi

Ankara Üniversitesi

Tanım

$a_1(n), a_2(n), \ldots, a_k(n)$ katsayıları ile $g(n)$, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar olsun. $a_k(n) \neq 0$ olmak üzere

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + \ldots + a_k(n)x(n) = g(n)$$

şeklindeki bir fark denklemine **k yıncı basamaktan lineer fark denklemi** denir.

- Eğer $g(n) \equiv 0$ ise, denkleme **homogen denklem** denir. Aksi durumda **homogen olmayan denklem** denir. k yıncı basamaktan bir lineer homogen fark denklemi

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + \ldots + a_k(n)x(n) = 0$$

şeklinde ifade edilir.

- Bütün $a_i(n)$ katsayıları $a_i(n) \equiv a_i$ şeklinde sabitse, denkleme **sabit katsayılı denklem** denir. Aksi durumda **değişken katsayılı fark denklemi** denir.

Tanım

$f_1(n), f_2(n), \ldots, f_r(n)$ fonksiyonları $n \geq n_0$ için tanımlı olsun. Her $n \geq n_0$ için

$$c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) + \ldots + c_r f_r(n) = 0$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $c_1, c_2, \ldots, c_r$ sabitleri varsa, bu durumda $\{f_1(n), f_2(n), ..., f_r(n)\}$ cümlesine **lineer bağımlıdır** denir.

Tanım

$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + \ldots + a_k(n)x(n) = 0$ denkleminin k tane lineer bağımsız çözümünün cümlesi **temel cümle** denir.

Tanım

(Casoratyan)

$x_1(n), x_2(n), ..., x_r(n)$ fonksiyonlarının **casarotyanı**

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \ldots & x_r(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \ldots & x_r(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1(n+r-1) & x_2(n+r-1) & \ldots & x_r(n+r-1) \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma

(Abel Lemması)

$x_1(n), x_2(n), ..., x_r(n)$ *fonksiyonları* $x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + \ldots + a_k(n)x(n) = 0$ *denkleminin çözümleri ve* $W(n)$ *bu fonksiyonların Casoratyanı olsun. O halde,*

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a_k(i) \right) W(n_0), \;\; n \geq n_0$$

dır.

Sonuç

$x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$ fonksiyonları $x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + \ldots + a_k(n)x(n) = 0$ denkleminin çözümleri ve her $n \geq n_0$ için $a_k(n) \neq 0$ olsun. Bu durumda her $n \geq n_0$ sayısına karşılık $W(n) \neq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $W(n_0) \neq 0$ dır.

Teorem

$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + \ldots + a_k(n)x(n) = 0$ *denkleminin* $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$ *çözümlerinin bir temel cümle oluşturması için gerek ve yeter koşul herhangi bir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sayısına karşılık* $W(n_0) \neq 0$ *olmasıdır.*