# Bölüm 3

## Deneysel Tasarım

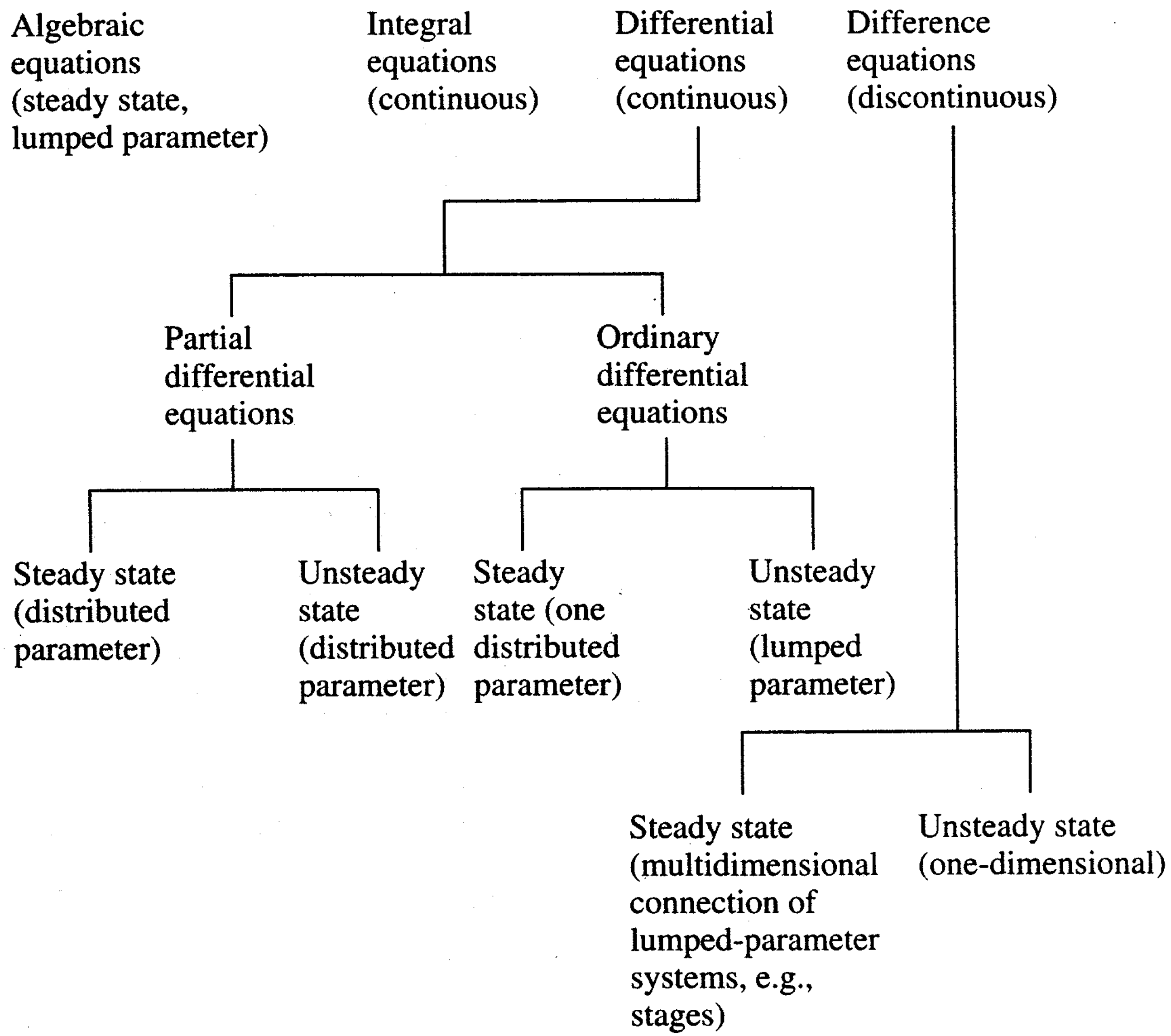



**FIGURE 2.3**
Typical mathematical forms of models.

Alıntı : Edgar T.F., Himmelblau D.M.,. Lasdon L.S. Optimization of chemical processes New York: McGraw-Hill, 2001

# Modellemedeki anlam

Basitleştirme nasıl yapılmalı?
Doğruluk nasıl yapılmalı?

## Basitleştirme, eliminizasyon

Etkileşimleri ihmal etme
Değişkenleri birleştirme
Değişkenleri Ortadan Kaldırmak
Rasgele Değişkenleri Beklenen Değerlerle Değiştirme
Matematiksel Tanımlamanın Ayrıntısını Azaltın

# Etkili Deneysel Tasarım

Endüstriyel proseslerin matematiksel modellenmesi günümüzde iki yöntemle yapılmaktadır. Bunlardan ilki kütle ve enerjinin korunum denklemleri, diğeri ise ampirik denklemlerdir (deneysel yöntemler). Kütle ve enerjinin korunumuna dayalı modeller, genellikle teknolojik proseslerin ortaya koyulması ve optimum tasarımının yapılmasında kullanılırken, diğer yöntem proses parametrelerinin belirlenmesinde daha çok kullanılır. Proses için deneysel olarak bir model tanımlamak istendiğinde öncelikle deneysel tasarım yapılmalıdır. Kabul edilen modele göre uygulanabilecek çok sayıda etkili deneyleme metotları vardır. Bunlar faktöriyel deneysel tasarımlar olarak adlandırılır. Faktöriyel deneysel tasarımlardan bazıları tam, iki seviyeli, kısmi, çok faktörlü ve karmaşık tasarımlar şeklinde sınıflandırılır. Bu deneysel metotlar seçilirken öncelikle belirlenen bağımlı değişken üzerinde etkili olan faktörlerin belirlenmesi gerekir. Daha sonra belirlenmiş olan modeli en iyi şekilde tanımlayacak olan deneysel tasarım matrisi oluşturulur.

Deneylerin çok faktörlü istatiksel planlanması aktif deneylerdir. Burada faktörler önceden belirlenmiş seviyeler üzerinde değişir. Eğer herhangi bir faktör için seviye değeri s , faktörlerin sayısı k ile gösterilecek olunursa doğrusal model için deney sayısı $N=s^k$ dır. Doğrusal olmayan model için $N= s^k+2k+1$ dır. Buna ilave model doğrulama deneyleri yapılmalıdır. Doğrusal/doğrusal olmayan model katsayılarının hesaplanmasında deneysel tasarım matrisinden faydalanılır. Bu tasarım matrisi faktörlerin boyutsuz koordinat düzleminde çalışılır ve boyutsuzlaştırma için aşağıdaki tanımlar kullanılmalıdır.

$$X_i = \frac{U_i - U_{iav}}{\Delta U_i}$$ i = 1,2,..........,n

$$U_{iav} = \frac{U_i^{max.} + U_i^{min.}}{2}$$ i = 1,2,.........,n

$$\Delta U_i = \frac{U_i^{max.} - U_i^{min.}}{2}$$ i = 1,2,........,n

$X_i$ ; faktörlerin kodlanmış değeri
$U_{io}$ ; faktörlerin ortalama değeri
$U_i$, ;faktörlerin gerçek değeri
$\Delta U_i$ ;faktörlerin adım aralığı

Burada faktörlerin kodlanmış değerleri +1 ile -1 olmak üzere iki anlamlıdır. +1, yüksek seviye, -1 düşük seviye, 0 ise ortalama seviyeyi gösterir. Planın merkezi ve aralığının seçilmesi deney yapanın tecrübesine bağlıdır. Aşağıda örnek tasarım matrisleri verilmiştir.

Tablo 1 İki faktör için deneysel tasarım matrisi

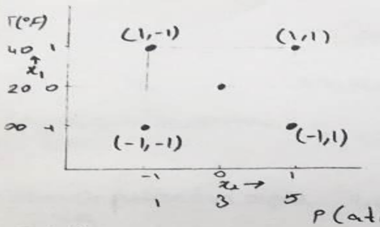
| Matrisin derecesi | | Deney No | $X_1$ | $X_2$ | $X_1X_2$ | Y |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | + | + | + | Y1 |
| | | 2 | + | - | | Y2 |
| | | 3 | - | + | | Y3 |
| | | 4 | - | - | | Y4 |
| | | 5 | +a | o | o | Y5 |
| | | 6 | - a | o | o | Y6 |
| | | 7 | o | +a | o | Y7 |
| | | 8 | o | - a | o | Y8 |
| | | 9 | o | o | o | Y9 |

Tablo 2 . İkinci dereceden plan matrisi için $\alpha$ değerleri

| k | $2^k=N_k$ | 2k=Na | No | N | a |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | $2^2$ | 2*2=4 | 1 | 9 | 1 |
| 3 | $2^3$ | 2*3=6 | 1 | 15 | 1.215 |
| 4 | $2^4$ | 2*4=8 | 1 | 25 | 1.414 |
| 5 | $2^5$ | 2*5=10 | 1 | 27 | 1.547 |
| $N=N_k+N_\alpha+N_o$ | | | | | |

$$\alpha=\sqrt{0.5\left(\sqrt{N_k{}^2+N_k\,(N\alpha+1)}-N_k\right)}$$

Gerek duyulursa bir sekizgen tasarım için çoğaltılabilecek olan aşağıdaki veriler bir birinci mertebe tasarım için (şekil 1) elde edildi.




Şekil 1 Sıcaklık ve basınç faktörleri için iki seviyeli faktöryel tasarım

$$x_1 = \frac{T(°F)-220}{20}$$

$$x_2 = \frac{P(atm)-3}{2}$$

| Y | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| 24.500 | −1 | −1 |
| 60.141 | 1 | −1 |
| 54.890 | −1 | 1 |
| 67.712 | 1 | 1 |
| 77.870 | 0 | 0 |
| 78.933 | 0 | 0 |
| 70.100 | 0 | 0 |

$Y = B_0 + B_1 x_1 + B_2 x_2 + \varepsilon$ şeklindeki doğrusal model, tekrarlı noktaları da içeren verilere uyduruldu (burada $x_0 \equiv 1$ ve tekrarlı nokta ağırlığı 3 olarak alındı).

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad d = \begin{bmatrix} 24.500 \\ 60.141 \\ 54.890 \\ 67.712 \\ 77.870 \\ 78.933 \\ 70.100 \end{bmatrix}, \quad P = (G^T G)^{-1} G^T d$$

olmak üzere doğrusal regresyon yapılarak parametre matrisi: P

$$P = \begin{bmatrix} 62.020 \\ 12.116 \\ 9.490 \end{bmatrix}$$ şeklinde elde edildi.

$$\hat{Y} = 62.020 + 12.116\, x_1 + 9.490\, x_2$$

Varyans analizi tablo 1'de gösterilmiştir.

Ampirik regresyon doğrusundan sapmaların serbestlik derecesi, farklı x ikililerinin sayısı eksi modelin katsayı sayısına eşittir, (5 - 3 = 2).

Tekrarlanan noktalardaki sapmaların serbestlik derecesi, toplam tekrarlı veri sayısı eksi kısıt sayısına eşittir, (3 - 1 = 2). Sınırlama $\bar{Y}$ nin orta noktada hesaplanmasından gelmektedir.

Varyans analizi birinci mertebe modelin yeterince uygun olmadığını göstermiştir.

Table 1

| Varyasyonun Kaynağı | Kareler Toplamı | Serbestlik Derecesi | Kare ortalaması | Varyans oranı $\left(\frac{\text{Kare ort.}}{23.3}\right)$ |
|---|---|---|---|---|
| $b_2$ | 360.3 | 1 | 360.3 | 15.46 |
| $b_1$ | 587.2 | 1 | 587.2 | 25.20 |
| $b_0$ | 29,926.1 | 1 | 29,926.1 | 1284.38 |
| Regresyondan sapma SSE | 1,103.2 | 2 (5-3) | 551.6 | 23.67 |
| Tekrarlı noktadan sapma SSR | 46.5 | 2 (3-1) | 23.3 | |
| | | 7 | | |

$F_{0,95}(2,2) = 19.00$

$23,67 > 19.00$

Model yeterli değil!

Sekizgen tasarımı tamamlamak üzere ek deneysel değerler toplanmıştır:


| $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|
| -1 | -1 |
| 1 | -1 |
| -1 | 1 |
| 1 | 1 |
| $\sqrt{2}$ | 0 |
| $-\sqrt{2}$ | 0 |
| 0 | $\sqrt{2}$ |
| 0 | $-\sqrt{2}$ |
| 0 | 0 |

| $Y$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_1^2$ | $x_2^2$ | $x_1 x_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 24.50 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 |
| 60.141 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 |
| 54.890 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 |
| 67.712 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 77.870 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 78.933 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 70.100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 59.162 | $\sqrt{2}$ | 0 | 2 | 0 | 0 |
| 53.095 | $-\sqrt{2}$ | 0 | 2 | 0 | 0 |
| 71.328 | 0 | $\sqrt{2}$ | 0 | 2 | 0 |
| 38.609 | 0 | $-\sqrt{2}$ | 0 | 2 | 0 |
| 80.131 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Benzer şekilde $G$ ve $d$ matrisleri tanımlanarak $P = (G^T G)^{-1} G^T d$ ifadesi kullanılarak doğrusal regresyon yapıldı

$\hat{Y} = 76,75 + 10.66 x_1 + 10.53 x_2 - 2.50 x_1^2 - 13.08 x_2^2 - 5,70 x_1 x_2$ elde edildi.

Varyans analizi tablo 2'de gösterilmiştir.

| Varyasyonun Kaynağı | Kareler Toplamı | Serbestlik Derecesi | Kare ortalaması | Varyans oranı ( $\frac{\text{Kare ort}}{20.56}$ ) | |
|---|---|---|---|---|---|
| $b_{12}$ | 130.17 | 1 | 130.17 | 6.33 | $F_{0.95}(1,3)=10.13$<br>$6,33<10.13$ |
| $b_{22}$ | 1,094.86 | 1 | 1,094.86 | | |
| $b_{11}$ | 359.94 | 1 | 359.94 | | |
| $b_2$ | 886,88 | 1 | 886.88 | | |
| $b_1$ | 910.11 | 1 | 910.11 | | |
| $b_0$ | 23.567.5 | 1 | 23,567.5 | | |
| Regresyondan sapma SSR | 178.14 | 3<br>(9-6) | 59.38 | 2,88 | $F_{0.95}(3,3)=9,28$<br>$2,88<9,28$ |
| Tekrarlı noktadan sapma SSE | 61.67 | 3<br>(4-1) | 20.56 | | |
| | | 12 | | | |

Öngörülen regresyon doğrusundan sapmanın serbestlik derecesi, 9 farklı x seti eksi 6 katsayı eşittir 3 ve tekrarlı noktadan sapmanın serbestlik derecesi, toplam tekrarlı veri sayısı 4 eksi kısıt sayısı 1 eşittir 3 dür.

Varyans analizi göstermiştir ki;

ikinci mertebe model gayet uygundur ve $x_1x_2$ çarpım teriminin ihmalinin sakıncası yoktur.