Bölüm 12

Doğrusal olmayan programlama Sınırlamalı

Doğrusal olmayan programlama :

1. Lagrange çarpanları metodu
2. Succesive Linear Programming, SLP
3. Succesive Quatratic programing,SQP
4. Generalized reduced gradient,GRG

Lagrange Yöntemi:

Eşitlik kısıtları ile verilen optimizasyon problemi kısıtsız optimizasyon problemine dönüştürür.

$L(x,\lambda) = f(x) - \lambda g$ → Lagrange çarpanları

↓

Lagrange fonksiyonu

Gerekli koşullar:

1- $\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \qquad j = 1, \dots n)$

$\nabla_x L = 0.$

2- $\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(x) = 0 \qquad i = 1, \dots m \quad (\nabla_\lambda L = 0)$

$m+n$ bilinmeyenli (x,λ) ve $m+n$ eşitlik sistemi çözülür.

(x^*, λ^*) en iyi kısıtların sağlanması için.

$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(x) = 0$ koşulu sağlanmalıdır.

En iyi noktanın türünü belirleyebilmek için:

1.) $\nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*) \rightarrow H|_{x^*, \lambda^*}$ Hessian matrisi bulunur.

2) $z' \nabla g_i(x^*) = 0$ olacak biçimde z vektörü bulunur.

z vektörü ile H matrisinin çarpımı eğer

3) $z' \nabla_\lambda^2 L(x^*, \lambda) z = z' H z > 0$ ise (x^*, λ) minimum nokta

$= z' H z < 0$ ise x^* maksimum nokta

Min f(x1,x2)=-x1*x2
g1(x1,x2)=x1+x2+2=0
Problemini çözünüz

problemini Lagrange ...

$L(x,\lambda) = -x_1 x_2 - \lambda(x_1+x_2-2)$ Lagrange fonksiyonu elde edilir.

Gerekli koşullar

1-) $\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = -x_2 - \lambda = 0$ $\lambda = -x_2$

2) $\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = -x_1 - \lambda = 0$ $\lambda = -x_1$

2) $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x_1+x_2-2) = 0$

$\lambda + \lambda + 2 = 0$

$\lambda = -1 \Rightarrow x_1^* = 1,\ x_2^* = 1$

Yeterli koşul:

1- $\nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*) =$

$\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = -x_2 - \lambda$, $\dfrac{\partial L}{\partial x_1^2} = 0$ (H_{11})

$\dfrac{\partial L}{\partial x_1 \partial x_2} = -1$

$\dfrac{\partial L}{\partial x_1 \partial x_2} = -1$ $\dfrac{\partial L}{\partial x_2^2} = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = H$$

2. $\nabla_x g_i(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $z' \nabla_x g_i(x) = (z_1, z_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

$\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} = 1$

$\dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} = 1$

$z_1 + z_2 = 0$

$z_2 = -z_1$

3) $[z_1 \ \ -z_1]\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ -z_1 \end{bmatrix} = z_1^2 + z_1^2 = 2z_1 > 0$ pozitif

o halde $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ minimum noktadır

8.2.3 Problems Containing both Equality and Inequality Constraints

Kuhn-Tucker Conditions (KTC)

$$\text{Minimize:} \quad f(\mathbf{x}) \tag{8.25}$$

$$\text{Subject to:} \quad h_i(\mathbf{x}) = b_i, \quad i = 1, \ldots, m \tag{8.26a}$$

and

$$g_j(\mathbf{x}) \leq c_j, \quad j = 1, \ldots, r \tag{8.26b}$$

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [h_i(\mathbf{x}) - b_i] + \sum_{j=1}^{r} u_j [g_j(\mathbf{x}) - c_j] \tag{8.27}$$

$$\nabla_x L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{u}^*) = \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{r} u_j^* \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \tag{8.28}$$

and complementary slackness hold for the inequalities:

$$u_j^* \geq 0 \qquad u_j^* [g_j(\mathbf{x}^*) - c_j] = 0, \quad j = 1, \ldots, r \tag{8.29}$$

Alıntı: Edgar T.F., Himmelblau D.M.,. Lasdon L.S. Optimization of chemical processes New York: McGraw-Hill, 2001

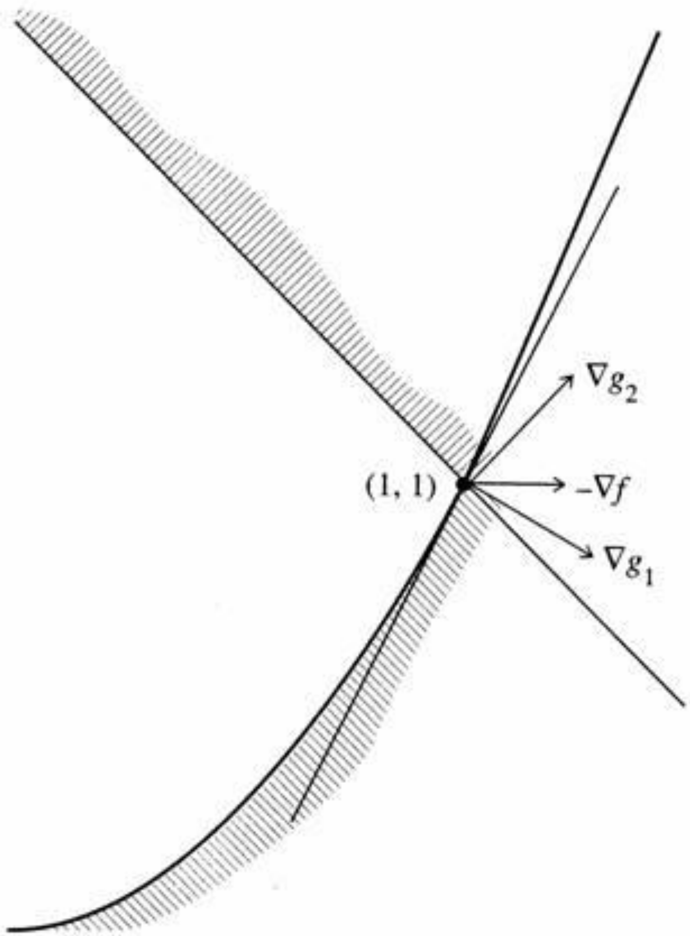


FIGURE 8.4
Gradient of objective contained in convex cone.

Alıntı: Edgar T.F., Himmelblau D.M.,. Lasdon L.S. Optimization of chemical processes New York: McGraw-Hill, 2001

Eşitsizlik Kısıtlı Optimizasyon Problemleri:

$$\text{Min } f(x)$$
$$h_j(x) \geq 0 \quad j=1,2,\dots m$$ şeklindeki doğrusal olmayan problemi çözmek için Lagrange teorisi uygulanabilir.

Gevşek Değişkenler (Slack Variables) Yöntemi: basit eşitsizlik kısıtlı probleme uygulanır. Mantık, eşitsizlikleri eşitliğe dönüştürüp Lagrange'ı uygulamak.

θ_j, gerçel değerli gevşek değişken olmak üzere

$$\theta_j^2 = h_j(x) \geq 0 \quad j=1,2,\dots m$$ tanımlanır ve probleme eklenir.

$$\text{Min} f(x)$$
$$h_j(x) - \theta_j^2 = 0 \quad j=1,2,m$$

$$L(x,\lambda,\theta) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [h_j(x) - \theta_j^2]$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = 0 \quad i=1,2,\dots n.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = -[h_j(x) - \theta_j^2] = 0 \quad j=1,2,\dots m$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_j} = 2\lambda_j \theta_j = 0 \quad j=1,2,\dots m$$

$\lambda_j^* = 0$ ve $\theta_j^* = 0$ ise yukarıdaki eşitlikler sağlanır.

ÖRNEK

$$\left.\begin{array}{l}\text{Min}\left[(x-a)^2+b\right] \\ x \geq c\end{array}\right\}$$ opt. prob. Gevşek değ. yön. göre çözünüz.

$$x-c=\theta^2$$

$$\mathcal{L}=(x-a)^2+b-\lambda(x-c-\theta^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2(x-a)-\lambda=0 \Rightarrow \quad x-a=0 \quad x=a \;(\lambda=0 \text{ ise})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=-(x-c-\theta^2)=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=2\lambda\theta=0$$

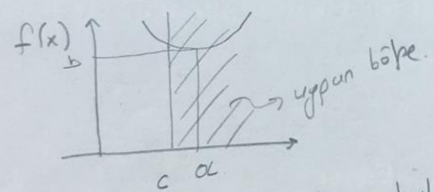
→ Durum 1: $\lambda=0$ ise $x^*=a$. $\theta^2=a-c$

$c<a$ ise θ gerçek sayı

$\theta^2 \geq 0$

$a-c=\theta^2 \geq 0$

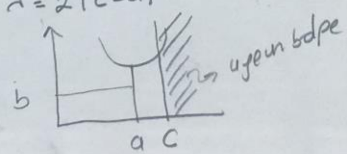
$a \geq c$



Durum 2: $\theta=0$ $x^*=c$ bulunur

$\lambda=(2(x-a))$

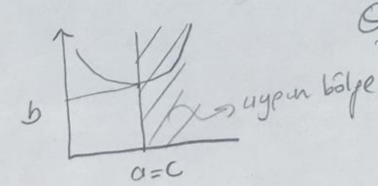
$\lambda=2(c-a)$ $\lambda^* \neq 0$ ise. $c \geq a$ olur.



$\theta=0$ $\lambda=0$ ise $x^*=c$

$c=a$'dır.

Durum 3:



13'

$y = 4x_1^2 + 5x_2^2$

$x_1 \geq 1 \longrightarrow$ b ifade aşağıdaki gibi yazılabilir.

$g_1 = 1 - x_1 \leq 0$

eşitsizlik eşitlik şeklinde yazılmalıdır.

$\phi_1 = g_1 + \delta_1 = 0 = 1 - x_1 + x_3^2 = 0$

$x_1 = 1 + x_3^2$

$\delta_i = x_{n+i}$ bu yada

$\delta_i = x_{n+1}^2$ en çok kullanılan olabilir

$\delta_1 = x_3^2$ dir

$y = 4(1+x_3^2)^2 + 5x_2^2$.

$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 10x_2 = 0$

$\frac{\partial y}{\partial x_3} = 16x_3(1+x_3^2) = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_1 = 1$'dir

Bu durgan noktaların min, max olduğuna bakalım

$\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_2 \partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_2 x_3} \\ \frac{\partial y}{\partial x_3 \partial x_2} & \partial y/\partial x_3 x_3 \end{bmatrix}$

$\frac{\partial y}{\partial x_2 \partial x_2} = 10$

$D_1 = 10 = y_{x_2 x_2}$

$D_2 = \begin{vmatrix} y_{x_2 x_2} & y_{x_2 x_3} \\ y_{x_3 x_2} & y_{x_3 x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 160.$

D_1, D_2 poz itif. minimum noktalardır.

Lagrange ile çözüm

$y = 4x_1^2 + 5x_2^2 - \lambda(1 - x_1 + x_3^2) = 0$

$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 8x_1 + \lambda = 0$

$\partial y / \partial x_2 = 10x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

$\partial y / \partial x_3 = -2\lambda x_3 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ yada $x_3 = 0$

$\lambda = -8$

$\partial y / \partial \lambda = -1 + x_1 - x_3^2 = 0$ $\boxed{x_1 = 1}$