

# BÖLÜM 14

VAKA ÇALIŞMASI: DOĞRUSAL  
BAĞIMLILIK SORUNLARI

# GİRİŞ

- Bu bölüm, doğrusal bağımlılık sorununa sahip olan gözlemsel bir veri setinin analizine ilişkindir.
- Vaka çalışmasının amacı; (1) doğrusal bağımlılık olduğunda sıradan en küçük karelerin yetersizliklerini göstermek, (2) verinin korelasyon yapısının analizinin önemini öğretmek, (3) temel bileşen analizinin sınırlarını ve kullanımını uygulamalı olarak anlatmaktır.

# PROBLEM

Bu analiz; Kuzey Karolina1'nin Cape Fear Nehir ağızında Linthrust'un BIOMASS2 kamış üretim verilerinin Eylül ayı örneklemeden beş değişkeni kullanan ilk vaka çalışmasının (Bölüm 5) devamı niteliğindedir.

Çalışmanın amacı, Cape Fear Nehri ağızında geniş çapta değişen havasal BIOMASS üretiminin belirlenmesinde etkisi olan toprak yapısının fiziksel ve kimyasal özellikleri belirlemektir. Örneklem planı nehir ağızındaki üç bataklık ve üç ekosistemi temsil eden her bir bataklıktaki üç bölgeyi içermektedir: bu ekosistemler sırasıyla, kamışların önceden kuruduğu fakat yakın zamanda tekrar yetiştiği alan, kısa kamışların bulunduğu alan ve uzun kamışların bulunduğu alandır. Dokuz bölgenin her birinden, iklimsel BIOMASS ve toprağın aylık olarak ölçülmüş aşağıdaki fiziko-kimyasal özelliklerinden rastgele beş örneklem noktası seçilmiştir.

1. Serbest Sülfür ( $H_2S$ ) molekülleri
2. Tuzluluk Oranı ( $SAL$ ), ‰
3. Ph 7'de Redox (oksitleme ve indirgeme) potansiyeli ( $Eh7$ ), mv
4. Sudaki çözünmüş pH değeri ( $pH$ ), 1.1 çözünmüş miktar/su
5. pH 6.6 değerinde yağ asitliği ( $BUF$ ), meq/100 cm<sup>3</sup>
6. Fosfor Yoğunluğu ( $P$ ), ppm
7. Potasyum Yoğunluğu ( $K$ ), ppm
8. Kalsiyum Yoğunluğu ( $Ca$ ), ppm
9. Magnezyum Yoğunluğu ( $Mg$ ), ppm
10. Sodyum Yoğunluğu ( $Na$ ), ppm
11. Manganez Yoğunluğu ( $Mn$ ), ppm
12. Çinko Yoğunluğu ( $Zn$ ), ppm
13. Bakır Yoğunluğu ( $Cu$ ), ppm
14. Amonyum Yoğunluğu ( $NH_4$ ), ppm.

TABLE 14.1. *Kuzey Karolina'nın Cape Fear nehir ağzındaki toprak yapısının ilave dokuz fizikokimyasal özelliği. Daha önce kullanılan iklimsel biyokütle (BIO) ve beş fiziko-kimyasal değişken için Tablo 5.1'e bakınız. (Veri, Dr. R. A. Linthurst'ın izniyle kullanılmıştır.)*

OBS	H <sub>2</sub> S	Eh7	BUF	P	Ca	Mg	Mn	Cu	NH <sub>4</sub>
1	-610	-290	2.34	20.238	2,150.00	5,169.05	14.2857	5.02381	59.524
2	-570	-268	2.66	15.591	1,844.76	4,358.03	7.7285	4.19019	51.378
3	-610	-282	4.18	18.716	1,750.36	4,041.27	17.8066	4.79221	68.788
4	-560	-232	3.60	22.821	1,674.36	3,966.08	49.1538	4.09487	82.256
5	-610	-318	1.90	37.843	3,360.02	4,609.39	30.5229	4.60131	70.904
6	-620	-308	3.22	27.381	1,811.11	4,389.84	9.7619	4.50794	54.206
7	-590	-264	4.50	21.284	1,906.63	4,579.33	25.7371	4.91093	84.982
8	-610	-340	3.50	16.511	1,860.29	3,983.09	10.0267	5.11364	53.275
9	-580	-252	2.62	18.199	1,799.02	4,142.40	9.0074	4.64461	47.733
10	-610	-288	3.04	19.321	1,796.66	4,263.93	12.7140	4.58761	60.674
11	-540	-294	4.66	16.622	1,019.56	1,965.95	31.4815	1.74582	65.875
12	-560	-278	5.24	22.629	1,373.89	2,366.73	64.4393	3.21729	104.550
13	-570	-248	6.32	13.015	1,057.40	2,093.10	48.2886	2.97695	75.612
14	-580	-314	4.88	13.678	1,111.29	2,108.47	22.5500	2.71841	59.888
15	-640	-328	4.70	14.663	843.50	1,711.42	33.4330	1.85407	77.572
16	-610	-328	6.26	60.862	1,694.01	3,018.60	52.7993	3.72767	102.196
17	-600	-374	6.36	77.311	1,667.42	2,444.52	60.4025	2.99087	96.418
18	-630	-356	5.34	73.513	1,455.84	2,372.91	66.3797	2.41503	88.484
19	-640	-354	4.44	56.762	2,002.44	2,241.30	56.8681	2.45754	91.758
20	-600	-348	5.90	39.531	1,427.89	2,778.22	64.5076	2.82948	101.712
21	-640	-390	7.06	39.723	1,339.26	2,807.64	56.2912	3.43709	179.809
22	-650	-358	7.90	55.566	1,468.69	2,643.62	58.5863	3.47090	168.098
23	-630	-332	7.72	35.279	1,377.06	2,674.65	56.7497	3.60202	210.316
24	-640	-314	8.14	97.695	1,747.56	3,060.10	57.8526	3.92552	211.050
25	-630	-332	7.44	99.169	1,526.85	2,696.80	45.0128	4.23913	185.454
26	-620	-338	-0.42	3.718	6,857.39	1,778.77	16.4856	3.41143	16.497
27	-620	-268	-1.04	2.703	7,178.00	1,837.54	11.4075	3.43998	13.655
28	-570	-300	-1.12	2.633	6,934.67	1,586.49	7.9561	3.29673	17.627
29	-620	-328	-0.86	3.148	6,911.54	1,483.41	10.4945	3.11813	15.291
30	-570	-374	-0.90	2.626	6,839.54	1,631.32	9.4637	2.79145	14.750
31	-620	-336	3.72	16.715	1,564.84	3,828.75	10.3375	5.76402	95.721
32	-630	-342	4.90	16.377	1,644.37	3,486.84	21.6672	5.36276	86.955
33	-630	-328	2.78	21.593	1,811.00	3,517.16	13.0967	5.48042	83.935
34	-630	-332	3.90	18.030	1,706.36	4,096.67	15.6061	5.27273	104.439
35	-610	-322	3.60	34.693	1,642.51	3,593.05	6.9786	5.71123	79.773
36	-640	-290	3.58	28.956	2,171.35	3,553.17	57.5856	3.68392	118.178
37	-610	-352	5.58	25.741	1,767.63	3,359.17	72.5160	3.91827	123.538
38	-600	-280	6.58	25.366	1,654.63	3,545.32	64.4146	4.06829	135.268
39	-620	-290	6.80	17.917	1,620.83	3,467.92	53.9583	3.89583	115.417
40	-590	-328	5.30	20.259	1,446.30	3,170.65	22.6657	4.70368	108.406
41	-560	-332	1.22	134.426	2,576.08	2,467.52	51.9258	4.11065	57.315
42	-550	-276	1.82	35.909	2,659.36	2,772.99	75.1471	4.09826	77.193
43	-550	-282	1.60	38.719	2,093.57	2,665.02	71.0254	4.31487	68.294
44	-540	-370	1.26	33.562	2,834.25	2,991.99	70.1465	6.09432	71.337
45	-570	-290	1.56	36.346	3,459.26	3,059.73	89.2593	4.87407	79.383

# ÇOKLU REGRESYON: SIRADAN EN KÜÇÜK KARELER

- Bu analizin sunulma amacı doğrusal bağımlılık sorununun varlığı durumunda sıradan en küçük karelerin davranışını göstermek ve hem sistemdeki önemli değişkenlerin belirlenmesinde hem de regresyon katsayılarının tahmininde sonuçların yanıtıcı yapısını uygulamalı olarak anlatmaktır.

TABLO 14.3. *PROC REG (SAS Enst. Şirketi, 1989b)*'de adımsal regresyon seçenekleri ve geriye doğru elemeyi kullanarak elde edilen 14 toprak değişkenindeki iklimsel biyokütlenin regresyonu. Bağımsız değişkenlerin hepsi birim uzunluk vektörü olmaları için merkezileştirilmiş ve standartlaştırılmıştır.

<i>Geriye Doğru Eleme</i>				<i>Adımsal</i>			
<i>Adım</i>	<i>Değişken Atılan (-)</i>	<i>C<sub>p</sub></i>	<i>Olasılık &gt; F</i>	<i>Adım</i>	<i>Değişken İlave Edilen(+) Atılan (-)</i>	<i>C<sub>p</sub></i>	<i>Olasılık &gt; F</i>
1	-BUF	13.0031	.9559	1	+PH	64.3294	.0001
2	-H <sub>2</sub> S	11.0208	.8935	2	+MG	7.4217	.0094
3	-NA	9.0745	.8123	3	+CA	9.9068	.0031
4	-MN	7.1585	.7634	4	+CU	3.8339	.0572
5	-P	5.5923	.4891	5	+P	2.2881	.1384
6	-SAL	4.7860	.2505	6	-P		
7	-EH7	4.0826	.2335				
8	-NH <sub>4</sub>	3.8077	.1731				
9	-K	4.3928	.1012				
10	-ZN	3.9776	.2061				

TABLO 14.4. On dört değişkenli modeldeki tahminlere göre adımsal regresyon yöntemiyle seçilen 4 bağımsız değişken için tahmin edilen regresyon katsayıları ve standart hataları.

<i>Değişken</i>	<i>14 Deęişkenli Modelden Tahminler</i>		<i>4 Deęişkenli Modelden Tahminler</i>	
	$\hat{\beta}_j$	$s(\hat{\beta}_j)$	$\hat{\beta}_j$	$s(\hat{\beta}_j)$
<i>pH</i>	2,006	2,764	4,793	894
<i>Mg</i>	-1,746	1,710	-2,592	564
<i>Ca</i>	-1,322	1,432	-2,350	908
<i>Cu</i>	2,374	771	1,121	573



TABLO 14.5. *Linthurst Eylül verisinde tüm değişkenler arasındaki çarpımsal moment korelasyonu*

	<i>BIO</i>	<i>H<sub>2</sub>S</i>	<i>SAL</i>	<i>Eh7</i>	<i>pH</i>	<i>BUF</i>	<i>P</i>	<i>K</i>
<i>BIO</i>	1.00							
<i>H<sub>2</sub>S</i>	.33	1.00						
<i>SAL</i>	-.10	.10	1.00					
<i>Eh7</i>	.05	.40	.31	1.00				
<i>pH</i>	.77	.27	-.05	.09	1.00			
<i>BUF</i>	-.73	-.37	-.01	-.15	-.95	1.00		
<i>P</i>	-.35	-.12	-.19	-.31	-.40	.38	1.00	
<i>K</i>	-.20	.07	-.02	.42	.02	-.07	-.23	1.00
<i>Ca</i>	.64	.09	.09	-.04	.88	-.79	-.31	-.26
<i>Mg</i>	-.38	-.11	-.01	.30	-.18	.13	-.06	.86
<i>Na</i>	-.27	-.00	.16	.34	-.04	-.06	-.16	.79
<i>Mn</i>	-.35	.14	-.25	-.11	-.48	.42	.50	-.35
<i>Zn</i>	-.62	-.27	-.42	-.23	-.72	.71	.56	.07
<i>Cu</i>	.09	.01	-.27	.09	.18	-.14	-.05	.69
<i>NH<sub>4</sub></i>	-.63	-.43	-.16	-.24	-.75	.85	.49	-.12

	<i>Ca</i>	<i>Mg</i>	<i>Na</i>	<i>Mn</i>	<i>Zn</i>	<i>Cu</i>	<i>NH<sub>4</sub></i>
<i>Ca</i>	1.00						
<i>Mg</i>	-.42	1.00					
<i>Na</i>	-.25	.90	1.00				
<i>Mn</i>	-.31	-.22	-.31	1.00			
<i>Zn</i>	-.70	.35	.12	.60	1.00		
<i>Cu</i>	-.11	.71	.56	-.23	.21	1.00	
<i>NH<sub>4</sub></i>	-.58	.11	-.11	.53	.72	.93	1.00

# KORELASYON YAPISININ ANALİZİ

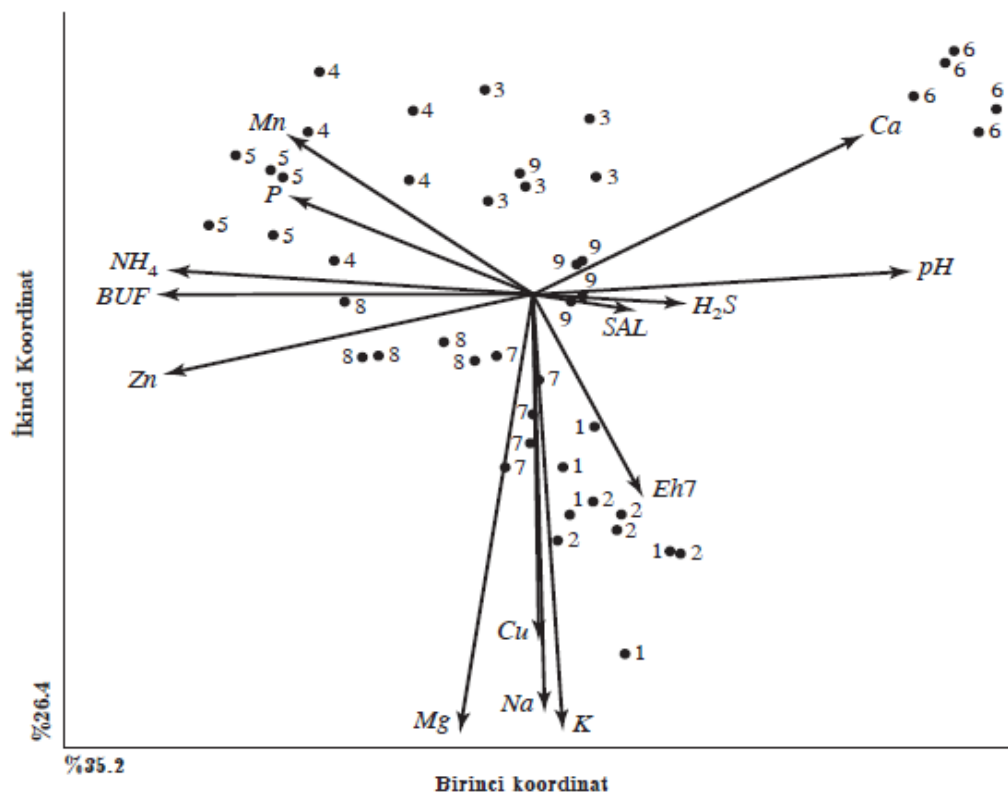
- Korelasyon yapısı analizinin amacı, incelenen değişkenler arasındaki ilişkileri ve doğrusal bağımlılık sorununun nedenlerini anlamayı sağlamaktır.
- Analiz, doğrusal bağımlılık sorununun bir kısmını ortadan kaldırmak amacıyla daha fazla veri elde etmek ya da değişkenleri yeniden tanımlamayı önerebilir.
- Bağımlı değişkendeki varyansla yakından ilgisi olan ve bu yüzden, müteakip çalışmaları gerektiren değişkenler sistemi belirlenecektir.

TABLO 14.6. *Linthurst Eylül verisinde 14 bağımsız değişken için Z'Z matrisinin öz değer ve öz vektörleri. Tüm değişkenler merkezleştirilmiş ve standart haldedir böylece Z'Z korelasyon matrisi halindedir.*

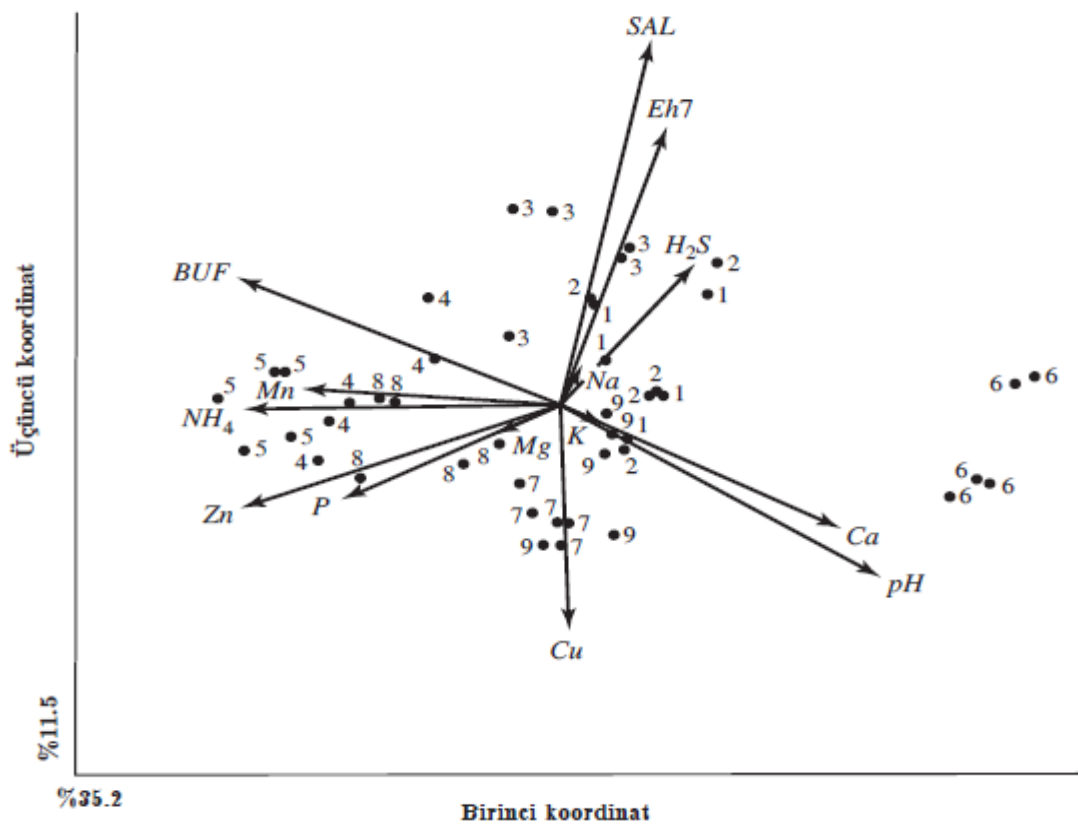
$\bar{\text{Öz değer}}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$
	4.925	3.696	1.607	1.335	.692	.500	.385
$\bar{\text{Öz vektör}}^a$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$
$H_2S$	.164	-.009	.232	-.690	.014	.422	-.293
$SAL$	.108	-.017	.606	.271	.509	-.008	-.389
$Eh7$	.124	-.225	.458	-.301	-.166	-.598	.308
$pH$	.408	.028	-.283	-.082	.092	-.190	-.056
$BUF$	-.412	-.000	.205	.166	-.162	.024	-.110
$P$	-.273	.111	-.160	-.200	.747	.018	.357
$K$	.034	-.488	-.023	-.043	-.062	.016	.073
$Ca$	.358	.181	-.207	.054	.206	-.427	-.117
$Mg$	-.078	-.499	-.050	.037	.103	-.034	.036
$Na$	.018	-.470	.051	.055	.240	.059	.160
$Mn$	-.277	.182	.020	-.483	.039	-.300	-.152
$Zn$	-.404	-.089	-.176	-.150	-.008	-.036	.062
$Cu$	.011	-.392	-.377	-.102	.064	-.075	-.549
$NH_4$	-.399	.026	-.011	.104	-.005	-.378	-.388
$\bar{\text{Öz değer}}$	$\lambda_8$	$\lambda_9$	$\lambda_{10}$	$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{13}$	$\lambda_{14}$
	.381	.166	.143	.0867	.0451	.0298	.0095

*Öz vektör*

	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$	$v_{11}$	$v_{12}$	$v_{13}$	$v_{14}$
$H_2S$	.087	.169	.296	.221	-.015	-.007	.080
$SAL$	-.081	-.174	-.227	.090	-.155	.095	-.089
$Eh7$	.299	-.225	.084	-.023	.055	.033	.023
$pH$	.033	.024	.147	.042	-.332	-.025	-.750
$BUF$	.159	.097	.103	.340	.455	-.354	-.478
$P$	.381	.077	-.018	-.035	.064	-.066	-.015
$K$	.112	.560	-.554	.219	-.029	.249	-.073
$Ca$	-.179	.189	.076	.508	.348	-.082	.306
$Mg$	-.173	-.012	.111	.119	-.400	-.689	.193
$Na$	-.459	.088	.439	-.219	.363	.275	-.144
$Mn$	-.524	.086	-.363	-.270	.076	-.172	-.141
$Zn$	-.211	-.438	.016	.572	-.217	.396	-.042
$Cu$	.305	-.376	-.129	-.194	.304	.000	.043
$NH_4$	.165	.420	.394	.132	.303	.232	.118



ŞEKİL 14.1. (14) metan gazı arazi değişkeninin ilk ve ikinci temel bileşenlerine ilişkin Gabriel'in ikili çizimi. Değişkenler merkezleştirilmiş ve ölçeklenmiştir böylece orijinal 14 boyutlu Z-uzayındaki tüm vektörler birim uzunluğa sahip olmuştur. Birinci ve ikinci temel bileşen Z-uzayındaki dağılımın % 35.2 ve % 26.4'ünü açıklamaktadır. Sütun işaretleri vektörler, satır işaretleri • ile gösterilmektedir.



ŞEKİL 14.2. (14) metan gazı arazi değişkeninin ilk ve ikinci temel bileşenlerine ilişkin Gabriel'in ikili çizimi. Değişkenler merkezleştirilmiş ve ölçeklenmiştir böylece orijinal 14 boyutlu Z-uzayındaki tüm vektörler birim uzunluğa sahip olmuştur. Üçüncü temel bileşen Z-uzayındaki dağılımın %11.5'ini açıklamaktadır. Sütun işaretleri vektörler, satır işaretleri • ile gösterilmektedir.

TABLO 14.7. *Bireysel tekil bileşen  $W_j$ 'de havaya ait BIOMASS regresyonu.*  
*(Linthurst Eylül Verisi)*

$W_j$	$SS(Regr)$	$F (df = 1, 30)^a$
1	10,117,269	82.2*
2	1,018,472	8.3*
3	1,254,969	10.2*
4	496,967	4.0
5	215,196	1.8
6	10,505	.1
7	267,907	2.2
8	675,595	5.5*
9	803,786	6.5*
10	110,826	.9
11	430,865	3.5
12	40,518	.3
13	2,160	.0
14	34,892	.3

TABLO 14.8. *Original bağımsız değişken  $X_k$  ve anlamlı temel bileşenler  $W_j$ :  $\hat{\rho}(X_k, W_j) = v_{jk}\lambda_j$  arasındaki Korelasyon.*

<i>Değişken</i>	<i>Temel Bileşen</i>					
	$X_k$	$W_1$	$W_2$	$W_3$	$W_8$	$W_9$
<i>H<sub>2</sub>S</i>		.364	-.017	.294	.054	.069
<i>SAL</i>		.240	-.033	.768	-.050	-.071
<i>Eh7</i>		.275	-.433	.581	.185	-.092
<i>pH</i>		.905	.054	-.359	.020	.010
<i>BUF</i>		-.914	.000	.260	.098	.040
<i>P</i>		.606	.213	-.203	.235	.031
<i>K</i>		.075	-.938	-.029	.069	.228
<i>Ca</i>		.794	.348	-.262	-.110	.077
<i>Mg</i>		-.173	-.959	-.063	-.107	-.005
<i>Na</i>		.040	-.904	.065	-.283	.036
<i>Mn</i>		-.615	.350	.025	-.323	.035
<i>Zn</i>		-.897	-.171	-.223	-.130	-.178
<i>Cu</i>		.024	-.754	-.478	.188	-.153
<i>NH<sub>4</sub></i>		-.885	.050	-.014	.102	.171



# TEMEL BİLEŞEN REGRESYONU

- Temel bileşen regresyonu, doğrusal bağımlılığın varlığında daha küçük ortalama hata kareleri olan tahmin elde etmenin yolu olarak önerilmektedir.
- Bu alıştırmada tahminlerin kararlılığında metodun etkisini ve metodun bağımsız değişkenlere nisbi önem sağlamadaki yeterliliğini göstermek için temel bileşen regresyonundan sonuçlar verilmiştir.
- Okuyucu bu metodu gözden geçirmek için Kısım 13.2'ye bakabilir.

TABLO 14.9. *En düşük dağılımlı  $W_{14}$  temel bileşenle başlayarak temel bileşen regresyonunda temel bileşenleri silmenin kümülatif etkisi.*

<i>Bileşen</i>	<i><math>X'X</math> deki Bilgi Kaybı</i>			
<i>Silinen</i>	<i>(%)</i>	<i>100R<sup>2</sup></i>	<i><math>\frac{\text{tr}[\text{Var}(\beta^+)]}{\sigma^2}</math></i>	<i><math>(\beta^{+'}\beta^+)^{1/2}</math></i>
<i>Sıfır (SEK)</i>	.0	80.7	196	4,636
14	.1	80.6	91	4,226
13	.3	80.6	57	4,218
12	.6	80.3	35	4,111
11	1.2	78.1	23	3,451
10	2.2	77.5	17	3,333
9	3.4	73.3	10	2,507
8	6.2	69.8	8	2,151
7	8.9	68.4	5	1,952
6	12.5	68.3	3	1,948
5	17.4	67.2	1.8	1,866
4	26.8	64.6	1.1	1,763
3	38.4	58.1	.5	1,526
2	64.8	52.8	.2	1,434

TABLO 14.10.  $g = 14$  (SEKK), 11 ve 9 temel bileşeni kullanarak standart hataları ve regresyon katsayılarının temel bileşen regresyon tahminleri.

Variable	$g = 14$ (OLS) <sup>a</sup>		$g = 11$		$g = 9$	
	$\hat{\beta}$	$s(\hat{\beta})$	$\beta^+$	$s(\beta^+)$	$\beta^+$	$s(\beta^+)$
$H_2S$	88	610	257	538	489	379
$SAL$	-591	645	-639	458	-238	393
$Eh7$	626	493	609	473	482	465
$pH$	2005	2763	896*	210	858*	152
$BUF$	-117	2058	-1364*	459	-685*	183
$P$	-312	483	-383	449	-445	446
$K$	-2069*	952	-2247*	761	-1260*	495
$Ca$	-1325	1431	-1046	690	30	317
$Mg$	-1744	1709	-817*	228	-652*	145
$Na$	203	1128	-488	577	-1365*	317
$Mn$	-274	872	-570	604	-848*	385
$Zn$	-1031	1195	-1005	791	251	410
$Cu$	2374*	771	2168*	563	1852*	500
$NH_4$	-847	1015	-400	621	-1043*	479
$R^2$	.807		.803		.775	
$VIF_{max}$	62.1		5.1		2.0	

\* tahminin kendi standart hatasının iki katını geçtiğini belirtmektedir.

# BÖLÜM 15

## PARAMETRELERİNE GÖRE DOĞRUSAL OLMAYAN MODELLER

# GİRİŞ

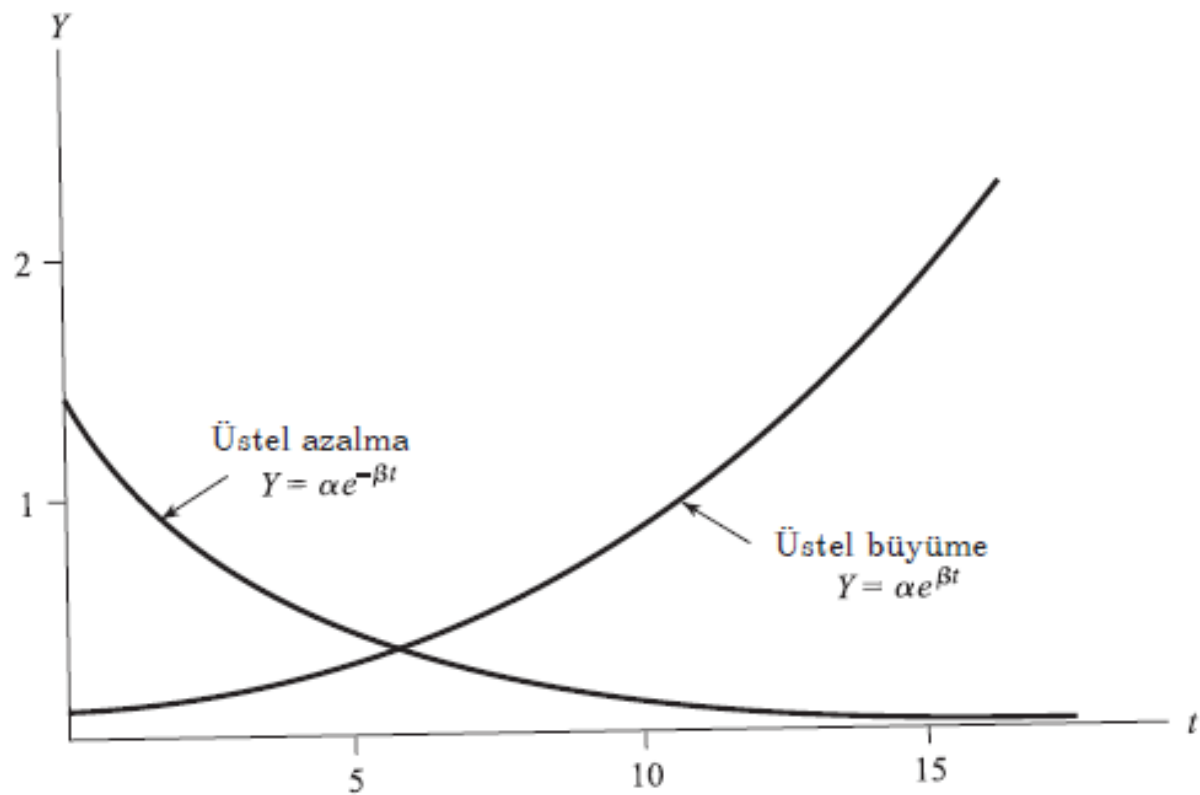
- Bu noktaya kadar ele alınan modeller, parametrelerin doğrusal fonksiyonları idi.
- Bu, modeldeki her bir terimin (toplamsal) sadece tek bir parametre ve bağımsız değişken (veya bunun fonksiyonu) üzerine bir çarpısal sabitini içermesi anlamına gelmektedir.
- Bu kısıtlama, çalışılan sistemin temel davranışlarından geliştirilen modellerin neredeyse tümünü içeren kullanışlı birçok matematiksel formları dışlamaktadır.
- Bu doğrusal modeller, doğru ilişkiye birinci sıra yaklaşımlar görünümünde olmalıdır.

# DOĞRUSAL OLMAYAN MODEL ÖRNEKLERİ

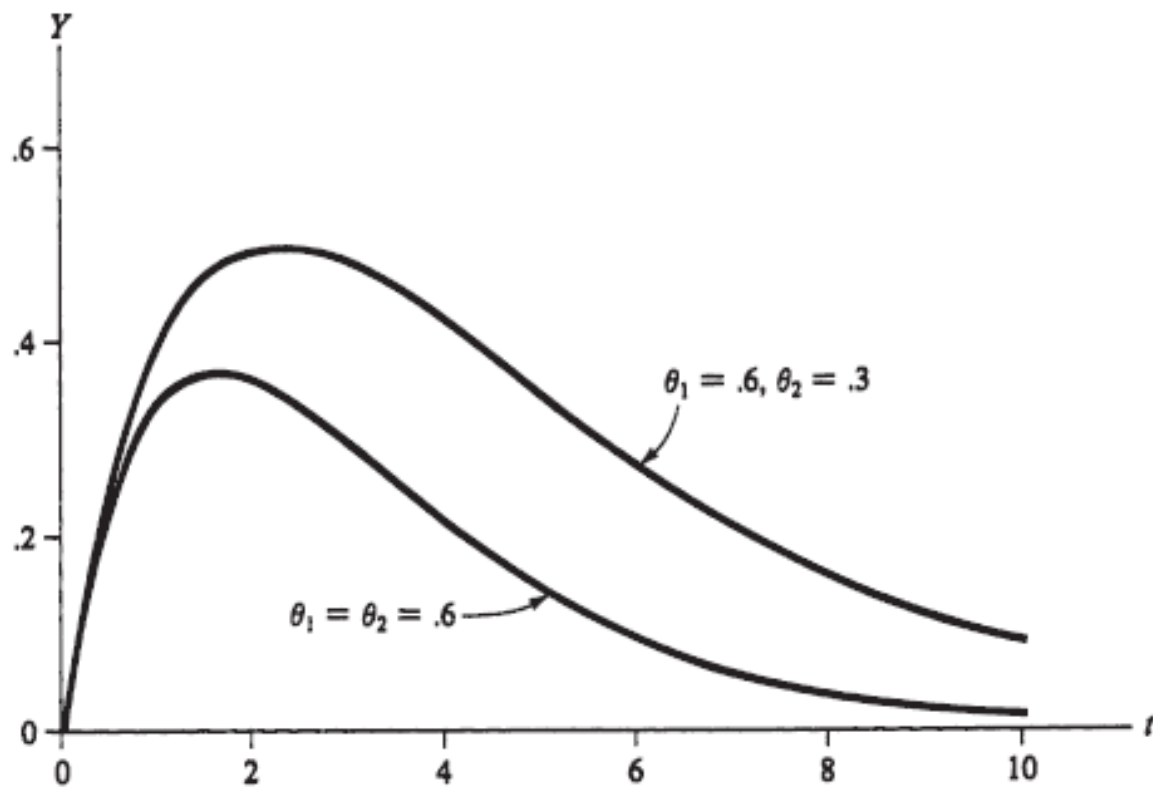
Parametrelerine göre doğrusal olmayan modellerin en genel sınıfı, bağımlı değişkenin ortalamasının bağımsız değişkenlerin ve parametrelerin herhangi bir fonksiyonu cinsinden,  $f(\mathbf{x}'_i; \boldsymbol{\theta})$ , tanımlanmasını göz önüne alır. Model

$$Y_i = f(\mathbf{x}'_i; \boldsymbol{\theta}) + \epsilon_i, \quad (15.1)$$

biçimindedir. Burada,  $f(\mathbf{x}'_i; \boldsymbol{\theta})$ ,  $\mathcal{E}(Y)$  ve bağımsız değişken(ler) arasındaki ilişkiyi gösteren doğrusal olmayan fonksiyon;  $\mathbf{x}'_i$ ,  $i$  gözlem birimi için  $k$  bağımsız değişkene ait gözlemlerin satır vektörü ve  $\boldsymbol{\theta}$ ,  $p$  parametre vektörüdür. (Doğrusal olmayan en küçük karelerde, parametre vektörü olarak  $\boldsymbol{\theta}$  nın kullanımı  $\boldsymbol{\beta}$  nın kullanımından daha yaygındır.) Rassal hatalar üzerinde genel varsayımlar yapılmıştır. Yani,  $\epsilon_i$  ler bağımsız ve  $N(0, \sigma^2)$  dağılımlı rassal değişkenlerdir.

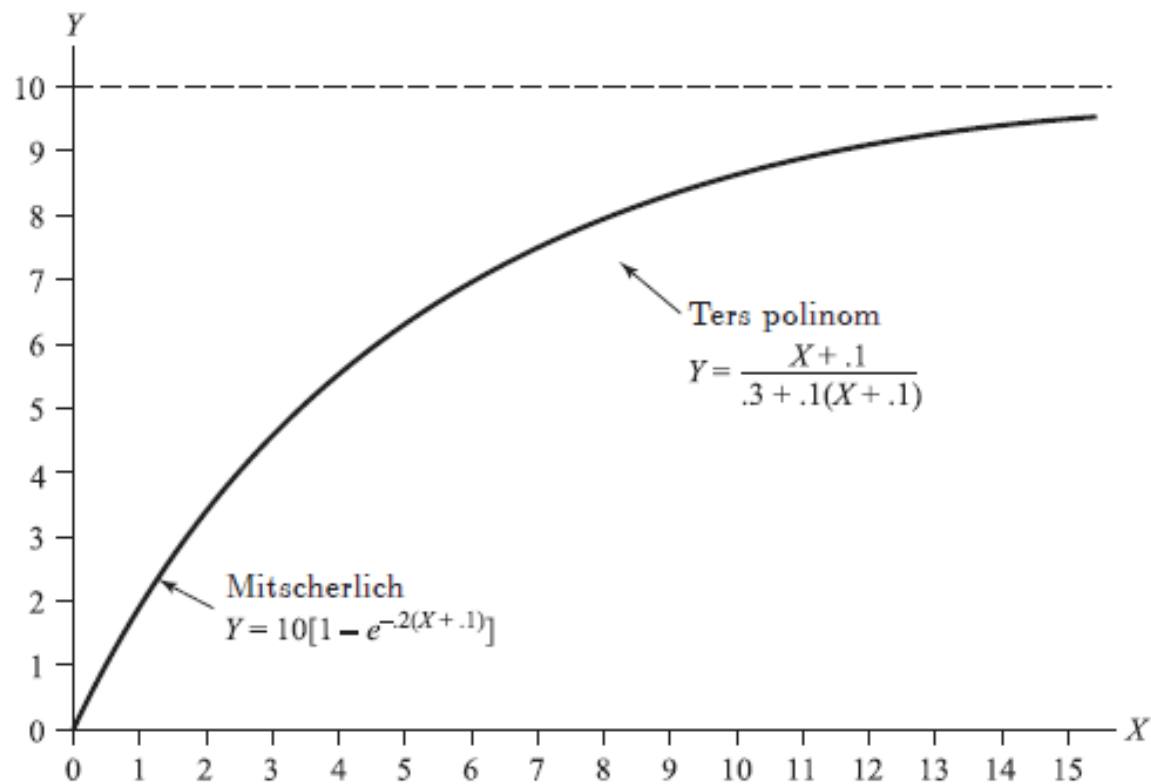


ŞEKİL 15.1. Üstel azalma modeli ve üstel büyüme modeli için tipik formlar.  $\beta$  parametresi her iki durumda da pozitiftir.

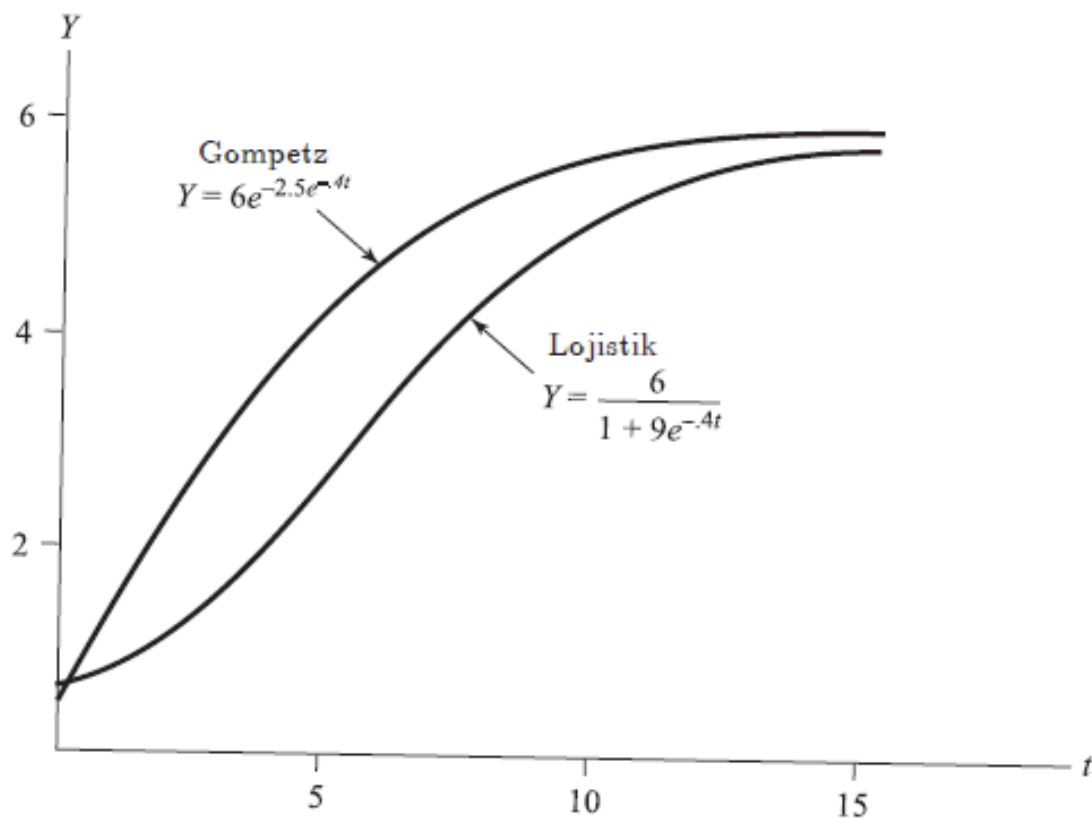


ŞEKİL 15.2.  $\theta_1 = .6, \theta_2 = .3$  parametreleri iki terimli üstel model Eşitlik 15.9; daha basit hali  $\theta_1 = \theta_2 = .6$  ile Eşitlik 15.10.

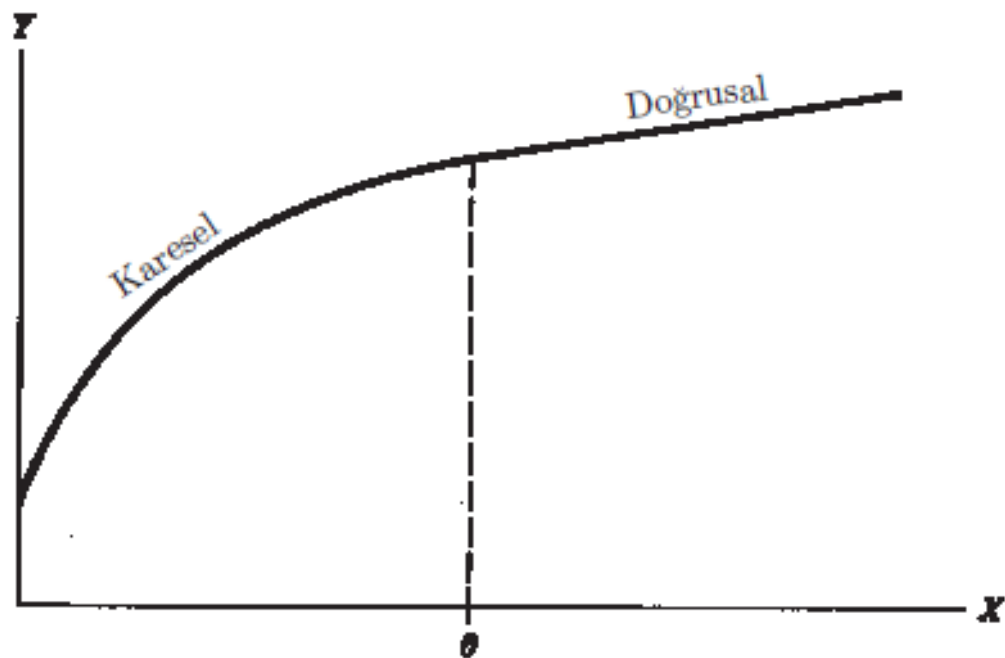




ŞEKİL 15.3. Mitscherlich ve ters polinom modellerin biçimi. Mitscherlich eşitliğindeki  $\alpha$  parametresi üst asimptot ve  $\beta$  asimptotun yaklaştığı orana kontrol eder. Ters polinomsal model  $1/\beta_1$  asimptotuna çok yavaş yaklaşır ve azalma oranı  $\beta_0/[\beta_0 + \beta_1(X + \delta)]^2$  ile tanımlanır.



ŞEKİL 15.4. Lojistik fonksiyonun ve Gompertz büyüme modelinin genel biçimi



ŞEKİL 15.5. *Karesel-doğrusal bölünmüş polinom regresyon eğrisinin bir gösterimi*

# PARAMETERELERİNE GÖRE DOĞRUSAL OLMAYAN MODELLER UYUMLAŞTIRMA

En küçük kareler prensibi, doğrusal modellerdeki duruma benzer olarak doğrusal olmayan modellerin parametrelerini tahmin etmek için kullanılır.  $\theta$  nın en küçük kareler tahmini,  $\hat{\theta}$ , artıkların kareleri toplamını minimize edecek parametrelerin

$$SS[\text{Res}(\hat{\theta})] = \sum_{i=1}^n [Y_i - f(x'_i; \hat{\theta})]^2$$

veya matris notasyonu ile

$$SS[\text{Res}(\hat{\theta})] = [\mathbf{Y} - \mathbf{f}(\hat{\theta})]'[\mathbf{Y} - \mathbf{f}(\hat{\theta})], \quad (15.28)$$

biçiminde seçimidir. Burada,  $\mathbf{f}(\hat{\theta})$ ,  $x'_i$  nin  $n$  değeri üzerinden hesaplanan

# DOĞRUSAL OLMAYAN MODELLERDE SONUÇ ÇIKARIMI

Doğrusal olmayan modellerde parametreler için güven aralıkları ve hipotez testi, doğrusal olmayan en küçük kareler tahmin edicilerinin yaklaşık dağılımlarına dayalıdır. Doğrusal en küçük kareler tahminlerinin bilinen özellikleri doğrusal olmayan en küçük kareler için sadece yaklaşık veya asimptotik olarak uygulanabilir. Eşitlik (15.33) teki  $F(\theta) = F$  matrisinin doğrusal olmayan en küçük karelerdeki yeri,  $X$  in doğrusal en küçük karelerdeki yeri ile aynıdır. Gallant (1987), eğer  $\epsilon \sim N(\mathbf{0}, I\sigma^2)$  ise,  $\hat{\theta}$ ,  $\theta$  ortalama ve  $\text{Var}(\hat{\theta}) = (F'F)^{-1}\sigma^2$  ile yaklaşık olarak normal dağılımlıdır:

$$\hat{\theta} \sim N[\theta, (F'F)^{-1}\sigma^2], \quad (15.34)$$

TABLO 15.1. *Bir radyoaktif kalsiyum çözümünde hücreye kalsiyum alınması (Veriler H.Grimes ten izni ile alındı ve kullanıldı, North Caroline State Üniversitesi)*

<i>İşlem Numarası</i>	<i>Zaman (dk)</i>	<i>Kalsiyum (nmoles/mt)</i>	<i>İşlem Numarası</i>	<i>Zaman (dk)</i>	<i>Kalsiyum (nmoles/mt)</i>
1	.45	.34170	15	6.10	2.67061
2	.45	-.00438	16	8.05	3.05959
3	.45	.82531	17	8.05	3.94321
4	1.30	1.77967	18	8.05	3.43726
5	1.30	0.95384	19	11.15	4.80735
6	1.30	0.64080	20	11.15	3.35583
7	2.40	1.75136	21	11.15	2.78309
8	2.40	1.27497	22	13.15	5.13825
9	2.40	1.17332	23	13.15	4.70274
10	4.00	3.12273	24	13.15	4.25702
11	4.00	2.60958	25	15.00	3.60407
12	4.00	2.57429	26	15.00	4.15029
13	6.10	3.17881	27	15.00	3.42484
14	6.10	3.00782	—	—	—

TABLO 15.2. İki terimli üstel modeli kullanarak Grimes verisinden doğrusal olmayan regresyon sonuçları

<i>Varyans Analizi</i>			
<i>Kaynak</i>	<i>s.d.</i>	<i>Kareler Toplamı</i>	<i>Ortalama Kare</i>
Model	3 <sup>a</sup>	240.78865	80.26288
Residual	24	7.46451	0.31102
Uncorr. total	27	248.25315	
<i>mborCorr.total</i>	26	53.23359	

<i>Parametre</i>	<i>Tahmin</i>	<i>Asimptotik Std. Hata</i>	<i>Asimptotik % 95</i>	
			<i>Alt</i>	<i>Üst</i>
$\hat{\alpha}_1$	.000100	.0000000	.0000000	.0000000
$\hat{\lambda}_1$	4,629.250	12,091.767	-20,326.728	29,585.229
$\hat{\alpha}_2$	4.310418	.9179295	2.4159195	6.2049156
$\hat{\lambda}_2$	.208303	.0667369	.0705656	.3460400

*Parametrelerin Asimptotik Korelasyon Matrisi*

	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\lambda}_2$
$\hat{\alpha}_1$	.0000	.0000	.0000	.0000
$\hat{\lambda}_1$	.0000	1.0000	-.5751	-1.0000
$\hat{\alpha}_2$	.0000	-.5751	1.0000	.5751
$\hat{\lambda}_2$	.0000	-1.0000	.5751	1.0000

TABLO 15.3. *Grimes verisine uygulanan Weibull büyüme modelinden doğrusal olmayan regresyon sonuçları*

<i>Varyans Analizi</i>			
<i>Kaynak</i>	<i>s.d.</i>	<i>Kareler Toplamı</i>	<i>Ortalama Kare</i>
Model	3	240.79017	80.2634
Residual	24	7.46297	.3110
Uncorr. total	27	248.25315	
<i>mbox</i> Corr. total	26	53.23359	

<i>Parametre</i>	<i>Tahmin</i>	<i>Asimptotik Std. Hata</i>	<i>Asimptotik % 95</i>	
			<i>Alt</i>	<i>Üst</i>
$\hat{\alpha}$	4.283429	.4743339	3.3044593	5.2623977
$\hat{\delta}$	4.732545	1.2700253	2.1113631	7.3537277
$\hat{\gamma}$	1.015634	.2272542	.5466084	1.4846603

*Parametrelerin Asimptotik Korelasyon Matrisi*

	$\hat{\alpha}$	$\hat{\delta}$	$\hat{\gamma}$
$\hat{\alpha}$	1.0000	.9329	-.7774
$\hat{\delta}$	.9329	1.0000	-.7166
$\hat{\gamma}$	-.7774	-.7166	1.0000



# VARSAYIMLARIN SAĞLANMAMASI

Kısım 15.3'te, Eşitlik 15.1'de  $\epsilon_i$  rassal hataların bağımsız  $N(0, \sigma^2)$  dağılımlı değişkenler olduğu varsayılınsın. Eşitlik 15.1'de doğrusal olmayan modelin parametreleri üzerindeki sonuç çıkarımı için normallik varsayımı örnek çapınının büyük olması nedeniyle gerekli değildir ve diğer bazı hafif varsayımlar karşılanmaktadır. Oysaki, homojen ve ilişkisiz hatalara ilişkin varsayımların ihlali doğrusal olmayan modeller üzerindeki sonuç çıkarımını etkiler. Hatalar heterojen ve ilişkili olduğunda, en küçük kareler tahmin edicileri etkin değildir ve eşitlik 15.35'te verilen  $\hat{\theta}$  nın tahmini varyansları uygun değildir.

# DEĞİŞEN VARYANSLI HATALAR

Eşitlik 15.1'de verilen model göz önüne alınsın. Burada  $\epsilon_i$  ler, bağımsız  $(0, \sigma_i^2)$  değişkenlerdir (fakat normal dağılımlı olması gerekli değildir).  $\sigma_i^2$  ve  $f(\mathbf{x}'_i; \boldsymbol{\theta})$  üzerinde bazı zayıf düzgünlük koşulları altında, Gallant (1987)  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  en küçük kareler tahmin edicisinin  $\boldsymbol{\theta}$  ortalama ve  $\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = (\mathbf{F}'\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}'\mathbf{V}\mathbf{F}(\mathbf{F}'\mathbf{F})^{-1}$  varyans ile yaklaşık normal dağılımlıdır. Burada,  $\mathbf{V} = \text{diag}(\sigma_1^2 \ \sigma_2^2 \ \cdots \ \sigma_n^2)$  dır.  $\mathbf{V} \neq \sigma^2\mathbf{I}$  olduğunda, Eşitlik 15.35'te verilen varyans tahmini uygun olmayacaktır.

Pratikte,  $\sigma_i^2$  nin davranışı için çok çeşitli modeller varsayılmıştır. Böyle bir model,  $\sigma_i^2 = \sigma^2/w_i$  ile verilmiştir. Burada,  $w_i$  ler bilinen sabitlerdir. Örneğin, eğer  $Y_i$ ,  $n_i$  ölçüm değeri  $Y_{ij}$  nin ortalaması ise,  $j = 1, \dots, n_i$ ,  $Y_i = n_i^{-1} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$ ,  $\sigma^2/w_i$  varyanslıdır. Burada,  $w_i = n_i$  dir ve  $\text{var}(Y_{ij}) = \sigma^2$  olduğu varsayılmıştır. Doğrusal modeller olması durumunda, dönüştürülmüş model

$$w_i^{1/2}Y_i = w_i^{1/2}f(\mathbf{x}'_i; \boldsymbol{\theta}) + w_i^{1/2}\epsilon_i \quad (15.48)$$

# İLİŞKİLİ HATALAR

Büyüme eğrisi modellerinde, gözlemlerin tek bir hayvandan veya bireyden gözlemlendiği verilerde, hatalar önemli derecede ciddi korelasyon gösterebilirler. Ayrıca, bazı ekonomik veriler ciddi korelasyonlu olabilir. Bu durumlarda,  $\text{Var}(\epsilon) = \sigma^2 V$  olup,  $\sigma^2 I$  değildir. Eğer  $V$  biliniyor olsaydı,  $\theta$  nın genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edicisi  $\hat{\theta}_V$

$$S_V(\theta) = [Y - f(x'_i; \theta)]' V^{-1} [Y - f(x'_i; \theta)]. \quad (15.53)$$

# LOJİSTİK REGRESYON

Yanıt değişkeninin varyansının değişkenin ortalamasının bir fonksiyonu durumlardaki bir doğrusal olmayan regresyon modeli özel olarak ele alınsın. Bir iki değerli yanıt değişkeni  $Y_i$  nin 0 ve 1 değerlerini aldığı düşünölsün. Örneğın,  $i$ . hastanın bir hastalığa sahip olup olmama durumuna göre  $Y_i = 1$  veya 0 olsun. Bu durumda

$$\mathcal{E}(Y_i) = P[Y_i = 1] = p_i$$

510 15. PARAMETRELERİNE GÖRE DOĞRUSAL OLMAYAN MODEL

ve

$$\text{Var}(Y_i) = p_i(1 - p_i).$$